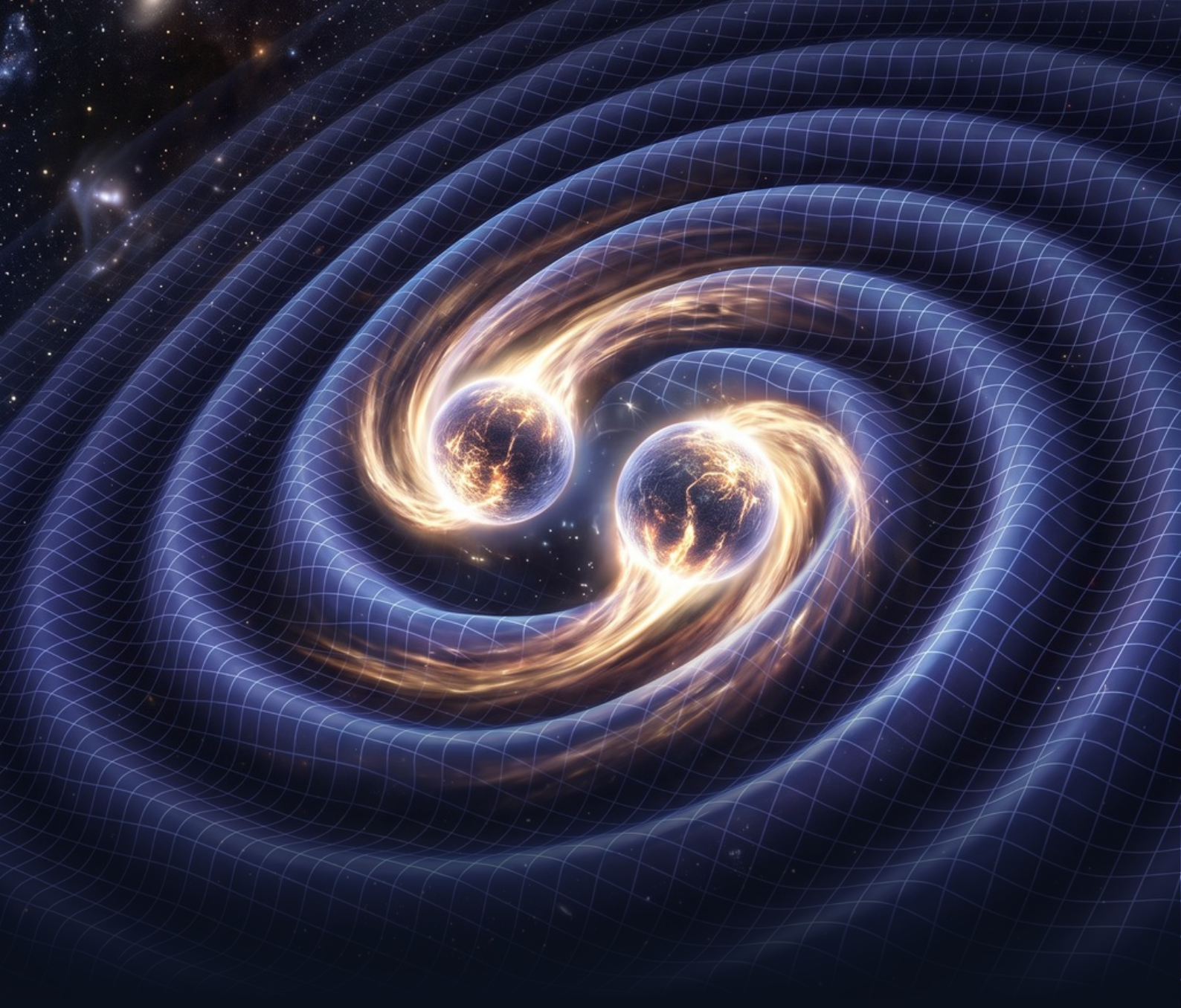




KÜTLE ÇEKİMSEL DALGALAR

Lineerleştirilmiş Einstein Alan Denklemleri ve İkili Sistemlerde Kuadrupol Radyasyon Kaybı

Akademik Araştırma Makalesi

Teorik Astrofizik — Adım Adım Analitik Türetimler, Vektör Diyagramları ve Sayısal Tablolar

Lineerleştirilmiş Einstein Alan Denklemleri ve İkili Sistemlerde Kuadrupol Radyasyon Kaybı

Kütle Çekimsel Dalgalar

Eylül 2026

Özet. Kütleçekimsel ışınım, genel göreliliğin, uzayzamanın doğrusal olmayan dinamik doğasına bağlı olmakla birlikte denetimli yaklaşıklıklarla hesaplanabilir kalan en temiz zayıf-alan öngörüsüdür. Bu makalede zayıf-alan metriğinden lineerleştirilmiş Einstein alan denklemleri geliştirilecek, enine-izsiz düzlem-dalga serbestlik dereceleri türetilecek ve bunlar serbest düşen dedektörlerde ölçülebilir gelgit gerinimleriyle ilişkilendirilecektir. Harmonik-ayar dalga denkleminin gecikmeli çözümü yavaş hareket eden yalıtılmış kaynaklar için açılarak kuadrupol dalga biçimi ve kuadrupol ışınım gücü formülü elde edilir. Bu genel sonuçlar daha sonra Newtoncu kompakt ikili sistemlere özelleştirilir. Dairesel bir ikili için standart güç kaybı, yörünge bozunumu, birleşme süresi, cıvıltı kütleli bağımlılığı ve öncü frekans evrimi türetilir. Eksantriklik düzeltmeleri Peters biçiminde verilir ve Hulse–Taylor pulsar testiyle ilişkilendirilir. PSR B1913+16 ve GW150914 için gerinim genliği, cıvıltı kütleli, ışınım gücü ölçeği ve ısıyan enerji dâhil olmak üzere çalışılmış sayısal kestirimler sunulur. Tartışma; varsayımları, ayar meselelerini, geçerlilik bölgesini ve temel kuadrupol yaklaşımı ile modern post-Newtoncu ve sayısal-görelilik dalga biçimi modellemesi arasındaki ilişkiyi vurgular.

Anahtar Kelimeler: kütleçekim dalgaları; lineerleştirilmiş kütleçekim; kuadrupol ışınım; kompakt ikili sistemler; cıvıltı kütleli; ikili pulsarlar

1. Giriş

Kütleçekim dalgalarının lazer interferometreleriyle doğrudan saptanması, kütleçekimsel ışınımı Einstein denklemlerinin biçimsel bir sonucundan kompakt cisimlerin, kuvvetli kütleçekimin ve yıldız evriminin gözlemsel bir sondasına dönüştürdü. Bununla birlikte altta yatan kuram matematiksel olarak mütevazı bir rejimde başlar: neredeyse düz bir metrik, küçük bir pertürbasyon, bir ayar seçimi ve bir dalga denklemi. Bu bileşenlerden iki tensörel polarizasyona sahip enine dalgalar ve baskın kaynağın bir kütle monopolü ya da dipolü değil, bir kuadrupol momentinin ikinci zaman türevi olduğu bir ışınım formülü elde edilir. Bu, kütleçekimsel ve elektromanyetik ışınım arasındaki ilk büyük kavramsal ayırmadır.

Tarihsel gelişim doğrudan olmamıştır. Einstein'ın zayıf kütleçekim dalgalarına ilişkin ilk hesaplamaları 1916 ve 1918'de ortaya çıkmıştır [2, 3]; Eddington dalga çözümlerindeki koordinat yapaylıklarının bazı yönlerini açıklığa kavuşturmuştur [4]. Ayar özgürlüğü, enerji akışı ve asimptotik ışınım ile ilişkili modern anlayış onlarca yıl içinde geliştirilmiş olup bugün görelilikte standarttır [5, 6, 7]. İlk yüksek duyarlılık gözlemsel kanıt interferometrelerden değil, Hulse ve Taylor tarafından keşfedilen ve uzun yıllar boyunca izlenen ikili pulsar PSR B1913+16'nın yörünge bozunumundan gelmiştir [11, 12, 13]. Yörünge periyodunda ölçülen azalma, gözlemsel ve Galaktik-ivmelenme belirsizlikleri dâhilinde kuadrupol öngörüsüyle uyur. İlk doğrudan saptama olan GW150914, bir ikili kara delik birleşmesi tarafından üretilmiş ve LIGO Bilimsel İşbirliği ile Virgo İşbirliği tarafından 2016'da duyurulmuştur [14]. Bir saniyenin kesri kadar sürede kütleçekim dalgalarıyla yaklaşık üç Güneş kütleli kadar durgunluk enerjisi yaymış-
tır.

Bu makale, ileri lisans ve lisansüstü astrofizik düzeyine uygun olarak zayıf-alan kuramının ve bunun ikili sistem sonuçlarının kendi içinde bütünlüklü bir türetimini verir. Vurgu, açık ara adımlar ve fiziksel yorum üzerindedir. Metrik imzası olarak $(-, +, +, +)$ kullanıyor, G ve c çarpanlarını koruyor ve Minkowski metriğini

$$\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1). \quad (1)$$

ile gösteriyoruz. Yunan indisleri 0, 1, 2, 3 uzayzaman koordinatları üzerinde, Latin indisleri 1, 2, 3 uzaysal koordinatları üzerinde değer alır ve tekrarlanan indisler üzerinden toplam alınır. Zayıf-alan hesaplamalarında, aksi belirtilmedikçe pertürbasyonların indisleri $\eta_{\mu\nu}$ ile yükseltilir ve alçaltılır.

2. Fiziksel ve Matematiksel Çerçeve

2.1. Zayıf alanlar ve mertebelenendirme

Einstein alan denklemleri

$$G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}. \quad (2)$$

şeklinde. Zayıf-alan rejiminde metrik, düz uzayzaman etrafında küçük bir pertürbasyon olarak yazılır:

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}, \quad |h_{\mu\nu}| \ll 1. \quad (3)$$

Ters metrik $g_{\mu\alpha}g^{\alpha\nu} = \delta_\mu^\nu$ bağıntısından elde edilir. Birinci mertebeye kadar

$$g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} - h^{\mu\nu} + O(h^2), \quad (4)$$

çünkü

$$(\eta_{\mu\alpha} + h_{\mu\alpha})(\eta^{\alpha\nu} - h^{\alpha\nu}) = \delta_\mu^\nu + O(h^2). \quad (5)$$

Yaklaşım yalnızca kütleçekimin zayıf olmasından ibaret değildir; aynı zamanda eğrilik yarıçapının yerel eylemsiz koordinatların tanımlandığı ölçekle karşılaştırıldığında büyük olması gerekir. Kompakt ikili sistemlerde erken içe sarmal evresinde yörünge potansiyeli $GM/(ac^2) \ll 1$ koşulunu sağlarken, hızlar $v/c \ll 1$ bağıntısına uyar. Kara deliklerin geç birleşme evresi bu koşulları ihlal eder ve sayısal görelilik gerektirir.

Tanım 1. Metrik pertürbasyonunun izi ve iz terslemesi

$$h \equiv \eta^{\mu\nu} h_{\mu\nu}, \quad \bar{h}_{\mu\nu} \equiv h_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} h. \quad (6)$$

şeklindedir. İz almak

$$\bar{h} = \eta^{\mu\nu} \bar{h}_{\mu\nu} = -h, \quad (7)$$

sonucunu verir; böylece ters bağıntı

$$h_{\mu\nu} = \bar{h}_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} \bar{h}. \quad (8)$$

olur.

İz terslemesi süs niteliğinde bir gösterim değildir. Harmonik ayarda lineerleştirilmiş Einstein tensörünün sadeleştiği tam olarak bu bileşimdir.

2.2. Birinci mertebede bağlantı ve eğrilik

Christoffel sembolleri

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\rho} = \frac{1}{2} g^{\rho\sigma} (\partial_{\mu} g_{\nu\sigma} + \partial_{\nu} g_{\mu\sigma} - \partial_{\sigma} g_{\mu\nu}). \quad (9)$$

ile verilir. (3) ve (4) yerine konulup $O(h^2)$ terimleri atıldığında

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\rho} = \frac{1}{2} \eta^{\rho\sigma} (\partial_{\mu} h_{\nu\sigma} + \partial_{\nu} h_{\mu\sigma} - \partial_{\sigma} h_{\mu\nu}). \quad (10)$$

elde edilir. Riemann tensörü

$$R^{\rho}{}_{\sigma\mu\nu} = \partial_{\mu} \Gamma_{\nu\sigma}^{\rho} - \partial_{\nu} \Gamma_{\mu\sigma}^{\rho} + \Gamma_{\mu\lambda}^{\rho} \Gamma_{\nu\sigma}^{\lambda} - \Gamma_{\nu\lambda}^{\rho} \Gamma_{\mu\sigma}^{\lambda}. \quad (11)$$

şeklindedir. Lineer mertebede Christoffel sembollerinin ikinci dereceden çarpımları atılır. İlk indisi $\eta_{\rho\alpha}$ ile alçaltmak

$$R_{\rho\sigma\mu\nu} = \frac{1}{2} (\partial_{\mu} \partial_{\sigma} h_{\rho\nu} + \partial_{\nu} \partial_{\rho} h_{\sigma\mu} - \partial_{\mu} \partial_{\rho} h_{\sigma\nu} - \partial_{\nu} \partial_{\sigma} h_{\rho\mu}). \quad (12)$$

sonucunu verir. Bu ifade, bir eğrilik tensöründen beklediği üzere, lineer mertebede sonsuz küçük koordinat dönüşümleri altında değişmezdir.

Riemann tensörünü büzştürmek Ricci tensörünü verir:

$$R_{\mu\nu} = R^{\rho}{}_{\mu\rho\nu}. \quad (13)$$

(12) kullanılarak

$$R_{\mu\nu} = \frac{1}{2} (\partial_{\rho} \partial_{\mu} h^{\rho}{}_{\nu} + \partial_{\rho} \partial_{\nu} h^{\rho}{}_{\mu} - \square h_{\mu\nu} - \partial_{\mu} \partial_{\nu} h), \quad (14)$$

elde edilir; burada düz d'Alembert operatörü

$$\square \equiv \eta^{\alpha\beta} \partial_{\alpha} \partial_{\beta} = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \nabla^2. \quad (15)$$

ile tanımlanır. Ricci skaleri

$$R = \eta^{\mu\nu} R_{\mu\nu} = \partial_{\mu} \partial_{\nu} h^{\mu\nu} - \square h. \quad (16)$$

olur. Dolayısıyla lineerleştirilmiş Einstein tensörü

$$G_{\mu\nu}^{(1)} = \frac{1}{2} (\partial_{\rho} \partial_{\mu} h^{\rho}{}_{\nu} + \partial_{\rho} \partial_{\nu} h^{\rho}{}_{\mu} - \square h_{\mu\nu} - \partial_{\mu} \partial_{\nu} h - \eta_{\mu\nu} \partial_{\alpha} \partial_{\beta} h^{\alpha\beta} + \eta_{\mu\nu} \square h). \quad (17)$$

şeklindedir.

2.3. Ayar dönüşümleri

Sonsuz küçük bir koordinat dönüşümü

$$x^{\mu} \rightarrow x'^{\mu} = x^{\mu} + \xi^{\mu}(x) \quad (18)$$

pertürbasyonu

$$h'_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \partial_{\mu} \xi_{\nu} - \partial_{\nu} \xi_{\mu}. \quad (19)$$

şeklinde değiştirir. İz

$$h' = h - 2\partial_{\alpha} \xi^{\alpha}, \quad (20)$$

olarak değişir ve iz-terslenmiş alan

$$\bar{h}'_{\mu\nu} = \bar{h}_{\mu\nu} - \partial_{\mu} \xi_{\nu} - \partial_{\nu} \xi_{\mu} + \eta_{\mu\nu} \partial_{\alpha} \xi^{\alpha}. \quad (21)$$

şeklinde dönüşür.

Not 1. Lineerleştirilmiş kütleçekimde ayar özgürlüğü, difeomorfizma değişmezliğinin zayıf-alan kalıntısıdır. $h_{\mu\nu}$ bileşenleri tek tek gözlenebilir değildir. Gözlenebilir etkiler gelgitseldir; eğrilikte ya da ayar-değişmez asimptotik dalga genliklerinde kodlanır.

3. Lorenz Ayarında Lineerleştirilmiş Einstein Denklemleri

Lorenz ya da harmonik ayar koşulu

$$\partial^{\mu} \bar{h}_{\mu\nu} = 0. \quad (22)$$

şeklindedir. Adlandırma tarihsel olarak elektromanyetizmadaki Lorenz ayarıyla paraleldir; “harmonik” ise lineer mertebede $\square x^{\mu} = 0$ sağlayan koordinatlara atıfta bulunur.

(6) kullanılarak Ricci tensörü

$$R_{\mu\nu} = -\frac{1}{2} \square \bar{h}_{\mu\nu} + \frac{1}{2} (\partial_{\mu} \partial^{\alpha} \bar{h}_{\alpha\nu} + \partial_{\nu} \partial^{\alpha} \bar{h}_{\alpha\mu}) - \frac{1}{4} \eta_{\mu\nu} \square \bar{h}. \quad (23)$$

biçiminde yeniden yazılabilir. Skaler eğrilik

$$R = \partial_{\alpha} \partial_{\beta} \bar{h}^{\alpha\beta} + \frac{1}{2} \square \bar{h}. \quad (24)$$

olur. $G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - g_{\mu\nu}R/2$ içine yerine koymak ve büzüş-türmede yalnızca sıfırıncı mertebe $g_{\mu\nu}$ tutmak

$$G_{\mu\nu}^{(1)} = -\frac{1}{2}\square\bar{h}_{\mu\nu} + \frac{1}{2}(\partial_\mu\partial^\alpha\bar{h}_{\alpha\nu} + \partial_\nu\partial^\alpha\bar{h}_{\alpha\mu}) - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\partial_\alpha\partial_\beta\bar{h}^{\alpha\beta}. \quad (25)$$

sonucunu verir. Lorenz ayarında son iki terim yok olur ve geriye

$$G_{\mu\nu}^{(1)} = -\frac{1}{2}\square\bar{h}_{\mu\nu}. \quad (26)$$

kalır. Dolayısıyla Einstein denklemleri (2)

$$\square\bar{h}_{\mu\nu} = -\frac{16\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}. \quad (27)$$

biçimine indirgenir.

Önerme 1. Uygun sınır koşullarını sağlayan yeterince düzgün herhangi bir zayıf-alan pertürbasyonu için bir ayar dönüşümüyle Lorenz ayarı uygulanabilir.

Kanıt. (21) bağıntısından

$$\begin{aligned} \partial^\mu\bar{h}'_{\mu\nu} &= \partial^\mu\bar{h}_{\mu\nu} - \square\xi_\nu - \partial_\nu\partial_\mu\xi^\mu + \partial_\nu\partial_\alpha\xi^\alpha \\ &= \partial^\mu\bar{h}_{\mu\nu} - \square\xi_\nu. \end{aligned} \quad (28)$$

elde edilir. Dolayısıyla $\partial^\mu\bar{h}'_{\mu\nu} = 0$ koşulu

$$\square\xi_\nu = \partial^\mu\bar{h}_{\mu\nu}. \quad (29)$$

denklemini çözerek sağlanır. Gecikmeli ya da başka türlü belirlenmiş sınır koşullarıyla bu dalga denkleminin bir çözümü vardır. $\square$

(27) denkleminin fiziksel içeriği doğrudandır: zayıf kütleçekimsel bozuntular c hızıyla yayılır ve gerilme-enerji tensörü bunların kaynağıdır. Gerilme-enerjinin korunumu tutarlı biçimde izler. (27) denkleminin ∂^μ türevi alınır ve (22) kullanılırsa aynı mertebede

$$\partial^\mu T_{\mu\nu} = 0 \quad (30)$$

elde edilir. Bu, yaklaşık düz bir arka planda hareket eden maddeye uygun özel-görelilik korunum yasasıdır.

4. Vakum Düzlem Dalgaları ve Enine-İzsiz Ayar

Vakumda $T_{\mu\nu} = 0$ olduğundan

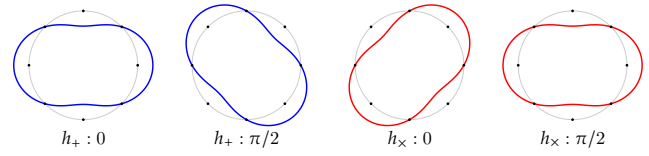
$$\square\bar{h}_{\mu\nu} = 0. \quad (31)$$

Bir düzlem-dalga çözümü

$$\bar{h}_{\mu\nu} = A_{\mu\nu}\exp(ik_\alpha x^\alpha), \quad (32)$$

şeklinde; burada dalga dört-vektörü

$$k^\mu = \left(\frac{\omega}{c}, \mathbf{k}\right), \quad k_\mu x^\mu = -\omega t + \mathbf{k} \cdot \mathbf{x}. \quad (33)$$



Şekil 1. Serbest düşen test kütlelerinden oluşan bir halkanın iki TT polarizasyonu tarafından gelgitsel deformasyonu. Gri çember pertürbe olmamış halkadır. Artı polarizasyon x ve y eksenleri boyunca gerer ve sıkıştırır; çarpı polarizasyon 45° döndürülmüştür.

ile verilir. (31) içine yerine koymak

$$k^\alpha k_\alpha = 0, \quad \omega = c|\mathbf{k}|. \quad (34)$$

sonucunu verir. Lorenz ayarı

$$k^\mu A_{\mu\nu} = 0. \quad (35)$$

koşulunu gerektirir.

Artık ayar dönüşümleri

$$\square\xi^\mu = 0. \quad (36)$$

ise Lorenz ayarını korur. Bir düzlem dalga için $\xi_\mu = B_\mu \exp(ik_\alpha x^\alpha)$ seçilebilir; bu, genliği

$$A'_{\mu\nu} = A_{\mu\nu} - ik_\mu B_\nu - ik_\nu B_\mu + i\eta_{\mu\nu}k_\alpha B^\alpha. \quad (37)$$

şeklinde değiştirir. Bu artık özgürlük kullanılarak $+z$ yönünde yayılan bir dalga enine-izsiz (TT) ayara konabilir:

$$h_{0\mu}^{TT} = 0, \quad h_{3\mu}^{TT} = 0, \quad h^{TTi}_i = 0. \quad (38)$$

Sıfırdan farklı uzaysal bileşenler

$$h_{ij}^{TT} = \begin{pmatrix} h_+ & h_\times & 0 \\ h_\times & -h_+ & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{ij}. \quad (39)$$

şeklinde. Monokromatik bir dalga için

$$h_+ = A_+ \cos \omega \left(t - \frac{z}{c}\right), \quad (40)$$

ve

$$h_\times = A_\times \cos \left[\omega \left(t - \frac{z}{c}\right) + \varphi \right]. \quad (41)$$

olur.

Denklem (39), kütleçekim dalgalarının iki bağımsız polarizasyon durumuna sahip olduğunu gösterir. Bunlar tensör kipleridir: yayılma doğrultusu etrafında ψ açısıyla bir dönme altında, elektromanyetik vektör polarizasyonlarının aksine, 2ψ açısıyla dönüşürler.

5. Test Kütleleri Üzerindeki Etki ve Dedektör Yanıtı

Bir kütleçekim dalgasının ölçülebilir etkisi gelgit ivmesidir. Küçük bir uzaysal ξ^i vektörüyle ayrılmış iki komşu serbest düşen parçacık düşünelim. Jeodezik sapma denklemi

$$\frac{d^2\xi^\mu}{d\tau^2} = -R^\mu{}_{\alpha\beta\gamma}u^\alpha u^\beta \xi^\gamma. \quad (42)$$

şeklinde. Yerel eylemsiz bir çerçevede yavaş hareket eden test kütleleri için $u^\mu \simeq (c, 0, 0, 0)$ ve $t \simeq \tau$ olduğundan

$$\frac{d^2 \xi^i}{dt^2} = -c^2 R^i_{0j0} \xi^j. \quad (43)$$

olur. (12) kullanılarak ve $h_{00} = h_{0i} = 0$ olan TT ayarında

$$R_{i0j0} = -\frac{1}{2c^2} \frac{\partial^2 h_{ij}^{TT}}{\partial t^2}. \quad (44)$$

elde edilir. Dolayısıyla

$$\frac{d^2 \xi^i}{dt^2} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 h_{ij}^{TT}}{\partial t^2} \xi^j. \quad (45)$$

Başlangıçta xy düzleminde dairesel bir halka için birinci mertebeye kadar integrasyon

$$\xi^i(t) = \left[\delta^i_j + \frac{1}{2} h^{TT i}_j(t) \right] \xi^j_0. \quad (46)$$

sonucunu verir. $1/2$ çarpanı, $h \sim 10^{-21}$ mertebesindeki bir gerinimin 4 km uzunluğundaki bir interferometre kolunu yalnızca $\sim 4 \times 10^{-18}$ m kadar değiştirmesinin nedenidir.

Dik birim kol vektörleri $\hat{u}$ ve $\hat{v}$ olan bir interferometre için diferansiyel kesirsel uzunluk değişimi

$$h_{\text{det}}(t) = \frac{1}{2} (u^i u^j - v^i v^j) h_{ij}^{TT}(t). \quad (47)$$

şeklinde. Geleneksel olarak

$$h_{\text{det}}(t) = F_+(\theta, \phi, \psi) h_+(t) + F_\times(\theta, \phi, \psi) h_\times(t), \quad (48)$$

yazılır; burada F_+ ve $F_\times$ gökyüzü konumuna ve polarizasyon açısına bağlı anten-desen fonksiyonlarıdır. x ve y doğrultularıyla hizalanmış kollar ve z doğrultusu boyunca dik gelen bir dalga için, dalga polarizasyon eksenleri dedektör kollarıyla çakışıyor

$$F_+ = 1, \quad F_\times = 0, \quad (49)$$

olur. 45° döndürülmüş bir dedektör ise bunun yerine $h_\times$ bileşenine azami duyarlı olurdu.

6. Gecikmeli Çözüm ve Kaynak Çokkutup Açılımı

Düz dalga operatörü için gecikmeli Green fonksiyonu

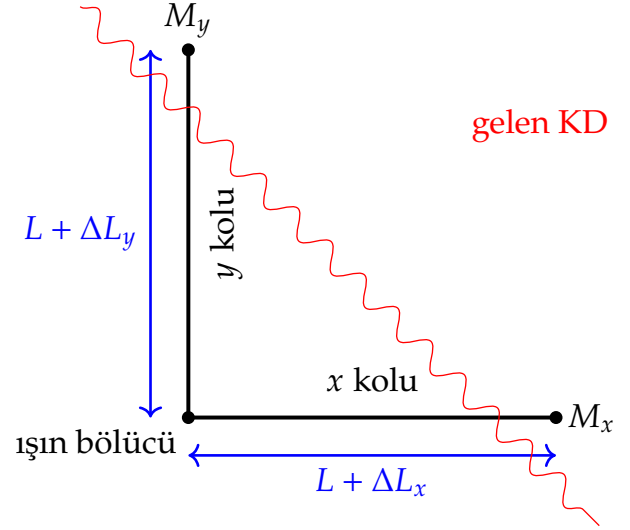
$$\square G_{\text{ret}}(t, \mathbf{x}) = \delta(t) \delta^3(\mathbf{x}), \quad (50)$$

denklemini sağlar ve yalnızca gelecek ışık konisinde desteğe sahiptir. Üç uzaysal boyutta

$$G_{\text{ret}}(t, \mathbf{x}) = -\frac{1}{4\pi|\mathbf{x}|} \delta\left(t - \frac{|\mathbf{x}|}{c}\right). \quad (51)$$

olur. (27) denkleminin çözümü

$$\bar{h}_{\mu\nu}(t, \mathbf{x}) = \frac{4G}{c^4} \int \frac{T_{\mu\nu}\left(t - \frac{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}{c}, \mathbf{x}'\right)}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} d^3x'. \quad (52)$$



Şekil 2. İdealize Michelson yanıtı. Bir TT kütleçekim dalgası, dik gelen artı-polarize bir dalga için öz kol uzunluklarını zıt işaretlerle değiştirir. Ölçülen sinyal (47) denklemindeki diferansiyel gerinimdir.

şeklinde. Bu, gecikmeli elektromanyetik potansiyelelin kütleçekimsel benzeğidir. Lineerleştirilmiş yaklaşımda içinde kesindir.

d boyutlu yalıtılmış bir kaynak $r = |\mathbf{x}|$ uzaklığında ve $r \gg d$ koşuluyla gözlemlensin. $\hat{\mathbf{n}} = \mathbf{x}/r$ yazalım. Bu durumda

$$|\mathbf{x} - \mathbf{x}'| = r - \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{x}' + O(d^2/r). \quad (53)$$

olur. d/r içinde öncü mertebede

$$\frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \simeq \frac{1}{r}, \quad (54)$$

ve gecikmeli zaman

$$t_{\text{ret}} = t - \frac{r}{c} + \frac{\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{x}'}{c} + O(d^2/rc). \quad (55)$$

şeklinde. Yavaş iç hareket için, $v \ll c$, kaynak boyunca faz değişimi küçüktür; dolayısıyla

$$\omega d/c \sim v/c \ll 1. \quad (56)$$

Bu durumda

$$\bar{h}_{ij}(t, \mathbf{x}) = \frac{4G}{c^4 r} \int T_{ij}(t - r/c, \mathbf{x}') d^3x'. \quad (57)$$

elde edilir.

T_{ij} integrali kütle kuadrupolünün ikinci türeviyle ilişkilidir.

$$I_{ij}(t) = \int \rho(t, \mathbf{x}) x_i x_j d^3x, \quad (58)$$

tanımlayalım; görelî olmayan limitte $T^{00} \simeq \rho c^2$ olur. Gerilme-enerji korunumu

$$\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0. \quad (59)$$

verir. $\nu = 0$ için,

$$\frac{\partial T^{00}}{\partial t} + c \partial_k T^{k0} = 0, \quad (60)$$

çünkü $x^0 = ct$ 'dir. $v = j$ için,

$$\frac{1}{c} \frac{\partial T^{0j}}{\partial t} + \partial_k T^{kj} = 0. \quad (61)$$

I_{ij} 'nin iki zaman türevi alınırsa

$$\frac{d^2 I_{ij}}{dt^2} = \frac{1}{c^2} \int \frac{\partial^2 T^{00}}{\partial t^2} x_i x_j d^3 x. \quad (62)$$

(60) kullanılarak

$$\frac{\partial^2 T^{00}}{\partial t^2} = -c \partial_k \frac{\partial T^{k0}}{\partial t}. \quad (63)$$

bulunur. Yavaş hareket eden madde için $T^{0k} = T^{k0}$ ve (61)

$$\frac{\partial T^{k0}}{\partial t} = -c \partial_l T^{kl}. \quad (64)$$

verir. Dolayısıyla

$$\frac{\partial^2 T^{00}}{\partial t^2} = c^2 \partial_k \partial_l T^{kl}. \quad (65)$$

(62) içine yerine koyulursa

$$\frac{d^2 I_{ij}}{dt^2} = \int x_i x_j \partial_k \partial_l T^{kl} d^3 x. \quad (66)$$

elde edilir. İki kez kısmi integrasyon yapıp yalıtılmış bir kaynak için yüzey terimlerini atarak

$$\begin{aligned} \frac{d^2 I_{ij}}{dt^2} &= \int T^{kl} \partial_k \partial_l (x_i x_j) d^3 x \\ &= \int T^{kl} (\delta_{ki} \delta_{lj} + \delta_{kj} \delta_{li}) d^3 x \\ &= 2 \int T^{ij} d^3 x. \end{aligned} \quad (67)$$

bulunur. Böylece

$$\int T^{ij} d^3 x = \frac{1}{2} \frac{d^2 I_{ij}}{dt^2}. \quad (68)$$

olur. (57) ve (68) birleştirilirse harmonik ayarda kuadrupol dalga biçimi

$$\bar{h}_{ij}(t, \mathbf{x}) = \frac{2G}{c^4 r} \frac{d^2 I_{ij}}{dt^2} \left(t - \frac{r}{c} \right). \quad (69)$$

olarak elde edilir. Gözlenebilir dalga biçimi TT projeksiyonudur:

$$h_{ij}^{\text{TT}} = \frac{2G}{c^4 r} \Lambda_{ij,kl}(\hat{\mathbf{n}}) \frac{d^2 Q_{kl}}{dt^2} \left(t - \frac{r}{c} \right). \quad (70)$$

Burada

$$Q_{ij} = I_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} I_{kk} \quad (71)$$

indirgenmiş, izsiz kuadrupol momentidir ve

$$\Lambda_{ij,kl} = P_{ik} P_{jl} - \frac{1}{2} P_{ij} P_{kl}, \quad P_{ij} = \delta_{ij} - n_i n_j. \quad (72)$$

şeklinde dir.

Not 2. Korunum, monopol ve dipol ışınımını ortadan kaldırır. Monopol, yalıtılmış yavaş bir kaynak için korunan toplam kütle-enerjidir. Kütle dipolü kütle merkezidir; düzgün harekette ikinci türevi yok olur. Bu nedenle kuadrupol, öncü ışınımsal kütle çokkuttubudur.

7. Enerji Akısı ve Kuadrupol Işınım Gücü

Kütleçekimsel enerji koordinattan bağımsız bir tensörde yerelleştirilemese de ışınım bölgesindeki zayıf dalgalar ayar-değişmez ortalamalı bir akıya sahiptir. Bir TT dalga için $\hat{\mathbf{n}}$ yönündeki etkin enerji akısı

$$\frac{dE}{dA dt} = \frac{c^3}{32\pi G} \left\langle \dot{h}_{ij}^{\text{TT}} \dot{h}_{ij}^{\text{TT}} \right\rangle. \quad (73)$$

şeklinde dir. Açılı parantezler birkaç dalga boyu ya da periyot üzerinden ortalamayı belirtir. TT kuadrupol dalga biçimini yerine koymak ve katı açı üzerinden integrasyon almak

$$P \equiv -\frac{dE}{dt} = \frac{G}{5c^5} \left\langle \frac{d^3 Q_{ij}}{dt^3} \frac{d^3 Q_{ij}}{dt^3} \right\rangle. \quad (74)$$

sonucunu verir. Türetimde kullanılan temel bir açılal özdeşlik

$$\int n_i n_j n_k n_l d\Omega = \frac{4\pi}{15} (\delta_{ij} \delta_{kl} + \delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}). \quad (75)$$

şeklinde dir. Denklem (74), kütleçekimsel kuadrupol ışınım gücü formülüdür. Küçük G/c^5 katsayısını içerir; bu, laboratuvar kütleçekimsel ışınımının neden ihmal edilebilir olduğunu, buna karşılık kompakt göreceli ikili sistemlerin neden parlak olabildiğini açıklar.

8. Dairesel İkili: Kuadrupol, Güç ve İç Sarmal

8.1. Geometri ve kuadrupol tensörü

Ayrılığı a olan Newtoncu dairesel bir yörüngede iki noktasal kütle m_1 ve m_2 düşünelim.

$$M = m_1 + m_2, \quad \mu = \frac{m_1 m_2}{M}. \quad (76)$$

tanımlansın. Bağlı ayrılık vektörü

$$\mathbf{x}(t) = a(\cos \Omega t, \sin \Omega t, 0), \quad (77)$$

olup Keplerci açılal frekans

$$\Omega^2 = \frac{GM}{a^3}. \quad (78)$$

şeklinde dir. Kütle merkezine göre konumlar

$$\mathbf{x}_1 = \frac{m_2}{M} \mathbf{x}, \quad \mathbf{x}_2 = -\frac{m_1}{M} \mathbf{x}. \quad (79)$$

ile verilir. Kütle kuadrupolü

$$\begin{aligned} I_{ij} &= m_1 x_{1i} x_{1j} + m_2 x_{2i} x_{2j} \\ &= \mu x_i x_j. \end{aligned} \quad (80)$$

olur. İzi

$$I_{kk} = \mu a^2. \quad (81)$$

şeklinde dir. Dolayısıyla

$$Q_{ij} = \mu \left(x_i x_j - \frac{1}{3} \delta_{ij} a^2 \right). \quad (82)$$

Açıkça,

$$Q_{xx} = \mu a^2 \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{2} \cos 2\Omega t \right), \quad (83)$$

$$Q_{yy} = \mu a^2 \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{2} \cos 2\Omega t \right), \quad (84)$$

$$Q_{xy} = \frac{1}{2} \mu a^2 \sin 2\Omega t, \quad (85)$$

$$Q_{zz} = -\frac{1}{3} \mu a^2. \quad (86)$$

Sabit parçalar ışıınım yapmaz. Üç zaman türevi alındığında

$$\ddot{Q}_{xx} = 4\mu a^2 \Omega^3 \sin 2\Omega t, \quad (87)$$

$$\ddot{Q}_{yy} = -4\mu a^2 \Omega^3 \sin 2\Omega t, \quad (88)$$

$$\ddot{Q}_{xy} = -4\mu a^2 \Omega^3 \cos 2\Omega t. \quad (89)$$

elde edilir. $Q_{xy} = Q_{yx}$ olduğundan

$$\begin{aligned} \ddot{Q}_{ij}\ddot{Q}_{ij} &= (\ddot{Q}_{xx})^2 + (\ddot{Q}_{yy})^2 + 2(\ddot{Q}_{xy})^2 \\ &= 32\mu^2 a^4 \Omega^6. \end{aligned} \quad (90)$$

(74) içine yerine koymak

$$P = \frac{32}{5} \frac{G}{c^5} \mu^2 a^4 \Omega^6. \quad (91)$$

sonucunu verir. Kepler yasası kullanılarak

$$a^4 \Omega^6 = \frac{G^3 M^3}{a^5}, \quad (92)$$

dolayısıyla

$$P = \frac{32}{5} \frac{G^4}{c^5} \frac{m_1^2 m_2^2 (m_1 + m_2)}{a^5}. \quad (93)$$

elde edilir.

8.2. Yörünge bozunumu ve birleşme süresi

Dairesel bir ikilinin Newtoncu yörünge bağlanma enerjisi

$$E = -\frac{Gm_1 m_2}{2a} = -\frac{G\mu M}{2a}. \quad (94)$$

şeklindedir. Enerji dengesi

$$\frac{dE}{dt} = -P. \quad (95)$$

verir.

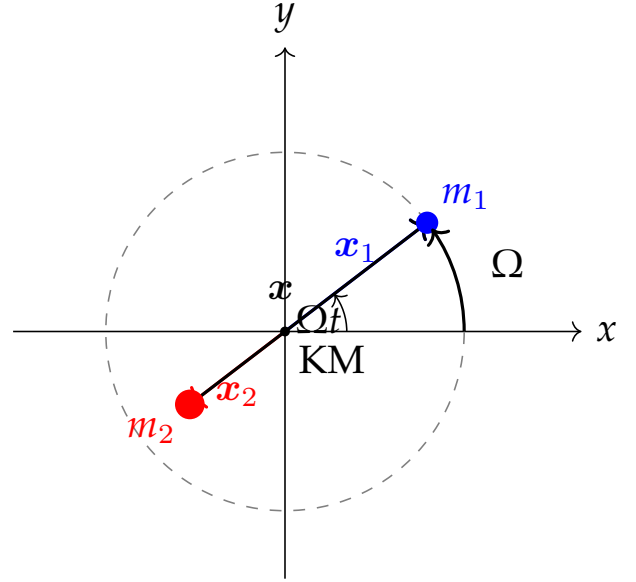
$$\frac{dE}{da} = \frac{G\mu M}{2a^2}, \quad (96)$$

olduğundan

$$\frac{da}{dt} = -\frac{2a^2 P}{G\mu M}. \quad (97)$$

elde ederiz. (93) kullanıldığında

$$\frac{da}{dt} = -\frac{64}{5} \frac{G^3 m_1 m_2 (m_1 + m_2)}{c^5 a^3}. \quad (98)$$



Şekil 3. Kütle merkezi koordinatlarında dairesel ikili. Bağlı vektör $\mathbf{x}$ büyüklük olarak a 'ya sahiptir ve $\Omega = (GM/a^3)^{1/2}$ açısal frekansıyla döner.

Bu diferansiyel denklem doğrudan integre edilir:

$$a^3 da = -\frac{64}{5} \frac{G^3 m_1 m_2 M}{c^5} dt. \quad (99)$$

$a(0) = a_0$ ile

$$a^4(t) = a_0^4 - \frac{256}{5} \frac{G^3 m_1 m_2 M}{c^5} t. \quad (100)$$

Bu öncü yaklaşımda birleşme süresi

$$t_c = \frac{5}{256} \frac{c^5 a_0^4}{G^3 m_1 m_2 (m_1 + m_2)}. \quad (101)$$

şeklindedir. Eşdeğer olarak,

$$a(t) = a_0 \left(1 - \frac{t}{t_c} \right)^{1/4}. \quad (102)$$

olur.

9. Eksantrik Yörüngeler ve Peters Artışı

Gerçek kompakt ikili sistemler eksantrikliğe sahip olabilir. Peters ve Mathews, Kepler elipsleri için yörünge-ortalı kütleçekim-dalgası kayıplarını türetmiştir [9, 10]. Yarı büyük eksen a ve eksantriklik e için ortalama güç

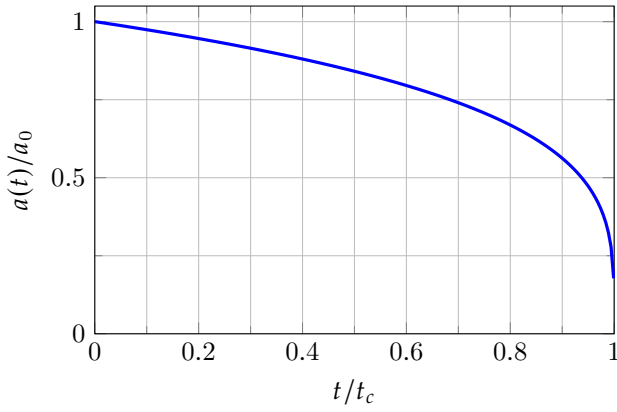
$$\langle P \rangle_e = \frac{32}{5} \frac{G^4}{c^5} \frac{m_1^2 m_2^2 M}{a^5} f(e), \quad (103)$$

olup eksantriklik artış çarpanı

$$f(e) = \frac{1 + \frac{73}{24}e^2 + \frac{37}{96}e^4}{(1 - e^2)^{7/2}}. \quad (104)$$

şeklindedir. Yarı büyük eksen ve eksantriklik

$$\left\langle \frac{da}{dt} \right\rangle = -\frac{64}{5} \frac{G^3 m_1 m_2 M}{c^5 a^3 (1 - e^2)^{7/2}} \left(1 + \frac{73}{24}e^2 + \frac{37}{96}e^4 \right), \quad (105)$$



Şekil 4. Öncü Newtoncu içe sarmal ayrılığı $a(t) = a_0(1 - t/t_c)^{1/4}$. da/dt 'nin sonlardaki ıraksaması, gerçek birleşmeden önce Newtoncu kuadrupol yaklaşımının bozulduğunu gösterir.

ve

$$\left\langle \frac{de}{dt} \right\rangle = -\frac{304}{15} e \frac{G^3 m_1 m_2 M}{c^5 a^4 (1 - e^2)^{5/2}} \left(1 + \frac{121}{304} e^2 \right). \quad (106)$$

olarak evrilir. $f(e)$ çarpanı $e \rightarrow 1$ iken büyür; çünkü ışınım, hızların ve ivmelerin en büyük olduğu periastron yakınında yoğunlaşır. Denklem (106), kütleçekimsel ışınımın yalıtılmış bağlı ikili sistemleri daireselleştirdiğini gösterir.

10. Cıvıltı Kütle, Frekans Evrimi ve Gerinim

Dairesel bir ikilinin baskın kuadrupol harmoniği için kütleçekim-dalgası frekansı yörünge frekansının iki katıdır:

$$f = \frac{\Omega}{\pi}. \quad (107)$$

(78) ve (107) birleştirildiğinde

$$a = \left[\frac{GM}{(\pi f)^2} \right]^{1/3}. \quad (108)$$

elde edilir. Cıvıltı kütle

$$\mathcal{M} = \mu^{3/5} M^{2/5} = \frac{(m_1 m_2)^{3/5}}{(m_1 + m_2)^{1/5}}. \quad (109)$$

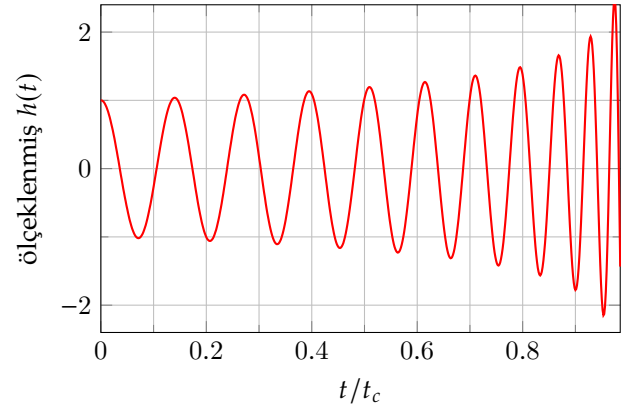
ile tanımlanır. Öncü frekans türevini denetlediğinden erken içe sarmalda en iyi ölçülen kütle birleşimidir.

(107) bağıntısını a 'ya göre türevleyelim:

$$f = \frac{1}{\pi} \left(\frac{GM}{a^3} \right)^{1/2}, \quad \frac{df}{da} = -\frac{3}{2} \frac{f}{a}. \quad (110)$$

(98) kullanılarak

$$\begin{aligned} \frac{df}{dt} &= \frac{df}{da} \frac{da}{dt} \\ &= \frac{96}{5} \frac{G^3 m_1 m_2 M}{c^5 a^4} f. \end{aligned} \quad (111)$$



Şekil 5. $h(t) \propto f(t)^{2/3} \cos \phi(t)$ olan analitik Newtoncu cıvıltı modeli. Genlik $(t_c - t)^{-1/4}$ olarak büyür ve anlık frekans, birleşme yakınında yaklaşım bozulana kadar $(t_c - t)^{-3/8}$ olarak artar.

elde edilir. (108) yerine konulursa

$$\frac{df}{dt} = \frac{96}{5} \pi^{8/3} \left(\frac{GM}{c^3} \right)^{5/3} f^{11/3}. \quad (112)$$

bulunur. Böylece cıvıltı hızla ivmelenir: yüksek frekansa geçirilen süre kısadır. (112) integre edilirse

$$t_c - t = \frac{5}{256} \left(\frac{GM}{c^3} \right)^{-5/3} (\pi f)^{-8/3}. \quad (113)$$

elde edilir. $f(t)$ için çözümlerse

$$f(t) = \frac{1}{\pi} \left[\frac{5}{256(t_c - t)} \right]^{3/8} \left(\frac{GM}{c^3} \right)^{-5/8}. \quad (114)$$

olur. Faz

$$\phi(t) = 2\pi \int^t f(t') dt', \quad (115)$$

bağıntısını sağlar; dolayısıyla keyfi bir sabite kadar

$$\phi(t) = \phi_c - 2 \left[\frac{c^3(t_c - t)}{5GM} \right]^{5/8}. \quad (116)$$

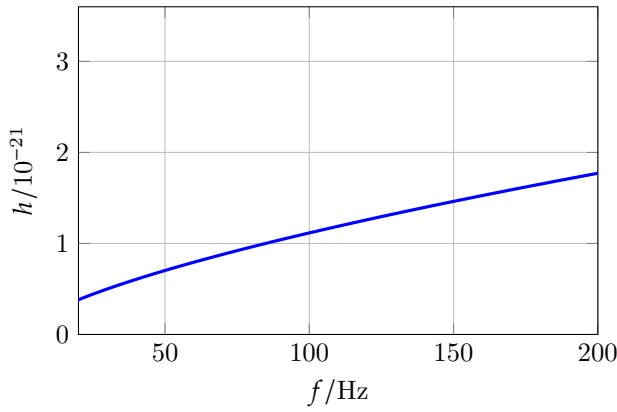
olur. Işınım uzaklığı r olan dairesel bir ikili için öncü gerinin genliği merteye olarak

$$h \simeq \frac{4}{r} \left(\frac{GM}{c^2} \right)^{5/3} \left(\frac{\pi f}{c} \right)^{2/3}, \quad (117)$$

şeklinde; bu, elverişli yönelimli bir kaynak içindir. Daha ayrıntılı ifadeler eğim açısı ι 'yı içerir:

$$h_+(t) = \frac{4G^{5/3} \mathcal{M}^{5/3}}{c^4 r} (\pi f)^{2/3} \frac{1 + \cos^2 \iota}{2} \cos \phi(t), \quad (118)$$

$$h_\times(t) = \frac{4G^{5/3} \mathcal{M}^{5/3}}{c^4 r} (\pi f)^{2/3} \cos \iota \sin \phi(t). \quad (119)$$



Şekil 6. Sabit cıvıltı kütleleri ve uzaklık için, 30 Hz’de $h = 0.5 \times 10^{-21}$ olacak şekilde normalize edilmiş öncü gerinim ölçeklenmesi $h \propto f^{2/3}$. Son gözlenen dalga biçimi post-Newtoncu, birleşme ve çınlama düzeltmeleri gerektirir.

Tablo 1. Kütleçekim-dalgası ikilileri için temsili sayısal ölçekler. Değerler yuvarlatılmıştır ve parametre kestiriminden ziyade fiziksel yönelim sağlamayı amaçlar.

Nicelik	PSR B1913+16	GW150914 ölçeği
m_1	$1.44 M_\odot$	$36 M_\odot$
m_2	$1.39 M_\odot$	$29 M_\odot$
M	$1.23 M_\odot$	$28 M_\odot$
Yörünge periyodu	7.75 h	milisaniyeler
Eksantriklik	0.617	bant yakınında küçük
Gözlenen oran	0.997	doğrudan gerinim
Tepe gerinimi	doğrudan değil	$\sim 10^{-21}$
Işınan enerji	seküler kayıp	$\sim 3 M_\odot c^2$

11. Çalışılmış Sayısal Uygulamalar

11.1. Yararlı sabitler

Şunları kullanıyoruz:

$$G = 6.67430 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}, \quad (120)$$

$$c = 2.99792458 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}, \quad (121)$$

ve

$$M_\odot = 1.98847 \times 10^{30} \text{ kg}. \quad (122)$$

Güneş kütleçekim zamanı

$$\frac{GM_\odot}{c^3} = 4.9255 \times 10^{-6} \text{ s}, \quad (123)$$

ve Güneş kütleçekim yarıçapı

$$\frac{GM_\odot}{c^2} = 1.477 \text{ km}. \quad (124)$$

şeklindedir.

11.2. Hulse–Taylor ikili pulsarı

PSR B1913+16 yaklaşık olarak

$$m_1 \simeq 1.44 M_\odot, \quad m_2 \simeq 1.39 M_\odot, \quad (125)$$

kütlelerine,

$$P_b \simeq 7.75 \text{ h} = 2.79 \times 10^4 \text{ s}, \quad (126)$$

yörünge periyoduna ve

$$e \simeq 0.617. \quad (127)$$

eksantrikliğine sahiptir. Yarı büyük eksen Kepler yasasından bulunur:

$$a^3 = GM \left(\frac{P_b}{2\pi} \right)^2. \quad (128)$$

$M \simeq 2.83 M_\odot$ ile bu

$$a \simeq 1.95 \times 10^9 \text{ m}. \quad (129)$$

verir. Eksantriklik artışı

$$f(0.617) = \frac{1 + \frac{73}{24}(0.617)^2 + \frac{37}{96}(0.617)^4}{[1 - (0.617)^2]^{7/2}} \simeq 11.8. \quad (130)$$

olur. Dolayısıyla ışınım gücü aynı a değerine sahip dairesel bir ikilininkinden çok daha büyüktür. Uzun dönemli zamanlama, kinematik ve Galaktik etkiler için düzeltme yapıldıktan sonra yörünge periyodu türevini ölçer. Gözlenenin öngörülene oranı yaklaşık

$$\frac{\dot{P}_{b,\text{obs}}}{\dot{P}_{b,\text{GR}}} \simeq 0.997, \quad (131)$$

olup kalan fark sistematik belirsizliklerle uyumludur [13]. Bu, kütleçekim dalgalarının enerjiyi genel göreliliğin öngördüğü biçimde taşıdığına dair ilk yüksek duyarlılık kanıtı.

11.3. Dairesel kompakt ikili zaman ölçeği

$$m_1 = m_2 = 1.4 M_\odot, \quad a_0 = 10^9 \text{ m}, \quad (132)$$

değerlerine sahip eş kütleli bir nötron yıldızı ikilisi için (101) denkleminde dairesel birleşme süresi

$$t_c = \frac{5}{256} \frac{c^5 a_0^4}{G^3 m_1 m_2 M} \simeq 2.7 \times 10^{14} \text{ s} \simeq 8.6 \times 10^6 \text{ yr}. \quad (133)$$

olur. Bu, dik a_0^4 bağımlılığını gösterir: başlangıç ayrılığını 10 kat azaltmak içe sarmal süresini 10^4 kat azaltır.

11.4. GW150914 merteye tahminleri

GW150914 kaynak çerçevesinde yaklaşık

$$m_1 \simeq 36 M_\odot, \quad m_2 \simeq 29 M_\odot. \quad (134)$$

bileşen kütleleriyle uyumluydu. Cıvıltı kütleleri

$$\mathcal{M} = \frac{(36 M_\odot \ 29 M_\odot)^{3/5}}{(65 M_\odot)^{1/5}} \simeq 28 M_\odot, \quad (135)$$

olup kestirimler için çoğunlukla “yaklaşık $30 M_\odot$ ” olarak yuvarlanır.

$$f \simeq 150 \text{ Hz}, \quad r \simeq 410 \text{ Mpc}, \quad (136)$$

ve

$$410 \text{ Mpc} \approx 1.27 \times 10^{25} \text{ m}, \quad (137)$$

alındığında, öncü gerinim kestirimi (117)

$$h \sim \frac{4}{r} \left(\frac{GM}{c^2} \right)^{5/3} \left(\frac{\pi f}{c} \right)^{2/3} \sim 10^{-21}. \quad (138)$$

sonucunu verir. Toplam ışıyan enerji yaklaşık

$$E_{\text{GW}} \approx 3 M_{\odot} c^2. \quad (139)$$

idi. Sayısal olarak,

$$3 M_{\odot} c^2 = 3(1.98847 \times 10^{30} \text{ kg})(2.9979 \times 10^8 \text{ m s}^{-1})^2 \approx 5.36 \times 10^{47} \text{ J}. \quad (140)$$

Eğer $\Delta t \sim 0.1 \text{ s}$ boyunca salındıysa, karakteristik ışıyan güç

$$L_{\text{GW}} \sim 5 \times 10^{48} \text{ W}, \quad (141)$$

olur; bu, kısa bir an için gözlenebilir Evren'in elektromanyetik ışıyan gücünü çok aşar. Bu karşılaştırma paradoksal değildir: kütleçekim dalgaları zayıf bağlaşıp ve neredeyse serbestçe kaçar.

12. Tartışma

12.1. Varsayımlar ve geçerlilik sınırları

Yukarıdaki türetimler birkaç varsayıma dayanır. Birincisi, alan zayıftır:

$$|h_{\mu\nu}| \ll 1. \quad (142)$$

Bu koşul, $h \sim 10^{-21}$ olan saptanmış tüm kütleçekim dalgaları için Dünya'da mükemmel biçimde sağlanır; ancak birleşen kara deliklerin ufukları yakınında sağlanmaz. İkincisi, kaynak çokkutup açılımı yavaş hareket varsayar:

$$\frac{v}{c} \ll 1, \quad \frac{GM}{ac^2} \ll 1. \quad (143)$$

Dairesel bir ikili için bunlar

$$\frac{v^2}{c^2} \approx \frac{GM}{ac^2}. \quad (144)$$

ile ilişkilidir. Newtoncu kuadrupol formülü bu nedenle günümüzde post-Newtoncu kuram olarak sistemleştirilen v/c açılımının öncü terimidir [15]. Birleşme yakınında v/c artık küçük değildir ve sayısal görelilik gerekir. Üçüncüsü, ışıyan-tepkisi yaklaşımı adyabatik içe sarmal varsayar: yörünge elemanları bir yörünge içinde çok az değişir. Bu

$$\left| \frac{\dot{a}}{a} \right| \ll \Omega. \quad (145)$$

koşulunu gerektirir. Şekil 5'te Newtoncu cıvıltı genliğinin biçimsel ıraksamasının da düşündürdüğü gibi, koşul birleşme yakınında bozulur.

12.2. Ayar ve gözlenebilirler

Yaygın bir kavramsal güçlük, kütleçekim dalgalarının metrik perturbasyonlarıyla tanımlanması, buna karşılık metrik bileşenlerinin koordinata bağlı olmasıdır. Çözüm, ölçülebilir niceliklerin eğrilik, öz-zaman farkları ve asimptotik TT genlikleri olmasıdır. Dalga boyuna kıyasla küçük bir dedektörde jeodezik sapma (45) temiz yerel ifadedir. Kolları dalga boyuna göre sonsuz küçük olmayan bir lazer interferometresinde tam dedektör yanıtı, ışığın null jeodezikler boyunca yayılımını içerir; ancak (47) öncü uzun-dalga boyu limitini yakalar.

TT ayarı vakumda özellikle saydamdır, ancak madde içinde genel olarak uygun bir küresel ayar değildir. Harmonik-ayar alanı $h_{\mu\nu}$ kaynaklı dalga denklemini çözmek için kullanışlıdır; TT projeksiyonu ise sonsuzdaki ışıyimsal serbestlik derecelerini ayıklar. Bu nedenle (69) denkleminde (70) denklemine geçiş isteğe bağlı değildir: dedektörler $\bar{h}_{\mu\nu}$ 'nün keyfi bileşenlerine değil, enine izsiz gelgit alanlarına yanıt verir.

12.3. Gözlemlerle karşılaştırma

Hulse–Taylor pulsarı yörünge-ortalı, zayıf ışıyan-tepkisi rejimini sınar. Yörünge hızları günlük standartlara göre görelî olsa da c ile karşılaştırıldığında hâlâ mütevazıdır ve sistem, elemanları yavaşça evrilirken birçok yörünge tamamlar. (131) denklemindeki 0.997 civarındaki uyum oranı, Galaktik ivmelenme ve öz hareket hesaba katıldıktan sonra kuadrupol formülünün en temiz doğrulamalarından biridir.

Yer tabanlı interferometreler tamamlayıcı bir rejimi sınar. GW150914'ün erken içe sarmalı cıvıltı-kütlesi ölçeklenmesiyle makul biçimde tanımlanır; ancak gözlenen sinyal ayrıca geç içe sarmal, birleşme ve çınlama içerir. Veri analizinde kullanılan tam dalga biçimi yalnızca (118) değildir. Daha yüksek post-Newtoncu düzeltmeleri, spin etkilerini, ilgili olduğunda presesyonu, sayısal göreliliğe karşı birleşme kalibrasyonunu ve kara delik yarı-normal çınlamasını içerir. Bununla birlikte basit kestirim (138), 10^{-21} civarında gerinim duyarlılığına sahip kilometre ölçekli interferometrelerin neden uygun araçlar olduğunu açıklar.

12.4. Modern gelişmeler

Modern kütleçekim-dalgası astronomisi temel kuramı birkaç yönde genişletir. Eşleşmiş-süzgeç aramaları birçok çevrim boyunca dalga biçimi faz doğruluğu gerektirir; bir radyan mertebesindeki faz hatası saptanabilirliği azaltabileceğinden yüksek mertebeden post-Newtoncu açılımlar ve etkin-tek-cisim yöntemleri zorunludur. Sayısal görelilik, doğrusal olmayan birleşme ve çınlama için tam Einstein denklemlerini çözer. Bayesçi parametre kestirimi, dedektör ağlarından kütleleri, spinleri, uzaklıkları, eğimleri, gökyüzü konumlarını ve genel görelilik testlerini çıkarır.

Kuadrupol formülü, bu gelişmelere karşın merkezi kalır. Neredeyse her kompakt-ikili içe sarmalı için öncü mertebeye genliği, ışıyan gücünü, yörünge bozunumu-

nu, cıvıltı kütlelerini ve nitel davranışı verir. Ayrıca ikili sistemlerin kütleçekim-dalgası göğüne neden egemen olduğunu açıklar: büyük ve hızla değişen kuadrupol momentlerine sahiptirler. Küresel simetrik çöküş genel görelilikte kütleçekim dalgası yaymaz ve eksensimetrik sistemler güçlü biçimde küresel olmayan kompakt ikililerden daha az verimli ışınım yapar.

13. Sonuç

Lineerleştirilmiş genel görelilik, Einstein'ın doğrusal olmayan alan denklemlerini Lorenz ayarında izterslenmiş pertürbasyon için hiperbolik bir dalga denklemine dönüştürür. Vakum çözümleri, fiziksel etkisi serbest düşen test kütlelerinin gelgitsel deformasyonu olan iki enine-izsiz tensör polarizasyonu, h_+ ve $h_\times$, içerir. Yavaş yalıtılmış bir kaynak için gecikmeli çözüm; gerilme-enerji korunumu ve uzak-bölge açılımından sonra kuadrupol dalga biçimine

$$\bar{h}_{ij} = \frac{2G}{c^4 r} \ddot{I}_{ij}, \quad (146)$$

ve ışınım gücüne

$$P = \frac{G}{5c^5} \langle \ddot{Q}_{ij} \ddot{Q}_{ij} \rangle. \quad (147)$$

götürür. Dairesel bir ikili için bu

$$P = \frac{32}{5} \frac{G^4}{c^5} \frac{m_1^2 m_2^2 M}{a^5}, \quad (148)$$

ve

$$\dot{a} = -\frac{64}{5} \frac{G^3 m_1 m_2 M}{c^5 a^3}. \quad (149)$$

sonuçlarını verir. Aynı çerçeve

$$\dot{f} \propto M^{5/3} f^{11/3}, \quad (150)$$

cıvıltı bağıntısını üretir; bu, kompakt-ikili kütle ölçümünün temelidir. Hulse-Taylor pulsarı seküler enerji kaybı öngörüsünü doğrularken, GW150914 gerinimin doğrudan saptanmasını ve kara delik birleşmesinin muazzam ışınım gücünü gösterir. Böylece zayıf-alan kuadrupol kuramı hem genel göreliliğin titiz bir limit durumu hem de modern kütleçekim-dalgası astrofiziğine kavramsal kapıdır.

Kaynaklar

- [1] B. W. Carroll and D. A. Ostlie, *An Introduction to Modern Astrophysics*, 2. baskı, Addison-Wesley, San Francisco (2007).
- [2] A. Einstein, "Näherungsweise Integration der Feldgleichungen der Gravitation," *Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften* (1916), 688–696.
- [3] A. Einstein, "Über Gravitationswellen," *Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften* (1918), 154–167.
- [4] A. S. Eddington, "The propagation of gravitational waves," *Proceedings of the Royal Society of London A* **102** (1922), 268–282.
- [5] C. W. Misner, K. S. Thorne, and J. A. Wheeler, *Gravitation*, W. H. Freeman, San Francisco (1973).
- [6] S. Weinberg, *Gravitation and Cosmology*, Wiley, New York (1972).
- [7] M. Maggiore, *Gravitational Waves, Volume 1: Theory and Experiments*, Oxford University Press, Oxford (2008).
- [8] B. F. Schutz, *A First Course in General Relativity*, 2. baskı, Cambridge University Press, Cambridge (2009).
- [9] P. C. Peters and J. Mathews, "Gravitational radiation from point masses in a Keplerian orbit," *Physical Review* **131** (1963), 435–440.
- [10] P. C. Peters, "Gravitational radiation and the motion of two point masses," *Physical Review* **136** (1964), B1224–B1232.
- [11] R. A. Hulse and J. H. Taylor, "Discovery of a pulsar in a binary system," *Astrophysical Journal* **195** (1975), L51–L53.
- [12] J. H. Taylor and J. M. Weisberg, "Further experimental tests of relativistic gravity using the binary pulsar PSR 1913+16," *Astrophysical Journal* **345** (1989), 434–450.
- [13] J. M. Weisberg and Y. Huang, "Relativistic measurements from timing the binary pulsar PSR B1913+16," *Astrophysical Journal* **829** (2016), 55.
- [14] B. P. Abbott et al. (LIGO Scientific Collaboration and Virgo Collaboration), "Observation of gravitational waves from a binary black hole merger," *Physical Review Letters* **116** (2016), 061102.
- [15] L. Blanchet, "Gravitational radiation from post-Newtonian sources and inspiralling compact binaries," *Living Reviews in Relativity* **17** (2014), 2.