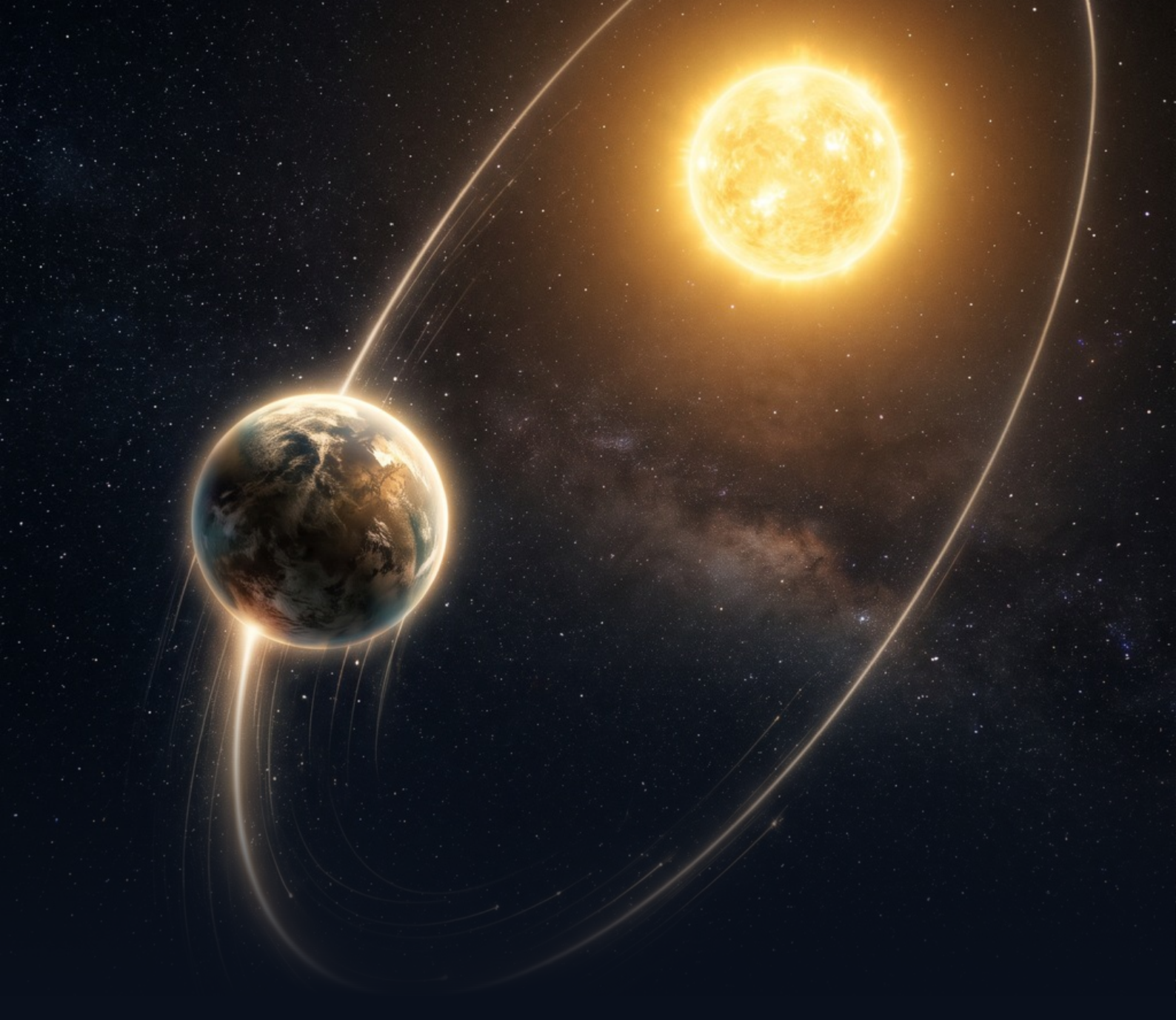




GÖK MEKANIĞI

Newton Kütle Çekiminden Kepler Yasalarının Vektörel Türetimi ve Yörünge Parametrelerinin Analitik Belirlenmesi

Akademik Araştırma Makalesi

Teorik Astrofizik — Adım Adım Analitik Türetimler, Vektör Diyagramları ve Sayısal Tablolar

Newton Kütle Çekiminden Kepler Yasalarının Vektörel Türetimi ve Yörünge Parametrelerinin Analitik Belirlenmesi

Gök Mekaniği

Eylül 2026

Özet. Newton kütleçekimi, yalıtılmış gezegen, yıldız ve uzay aracı yörüngeleri için dikkat çekici ölçüde eksiksiz bir analitik kuram sağlar. Bu makale, ters-kare kuvvetini integrallenebilir kılan geometrik hareket sabitlerini vurgulayarak, iki-cisim probleminden Kepler hareketinin vektörel bir türetimini sunmaktadır. İki-cisim sistemini indirgenmiş kütleli eşdeğer bir tek-cisim problemine indirgedikten sonra, doğrusal momentumun, özgül açısal momentumun, mekanik enerjinin ve Laplace–Runge–Lenz dışmerkezlilik vektörünün korunumunu türetiyoruz. Bu değişmezler, çekici kütlede odağı bulunan düzlemsel konik kesit yörüngelerini ve $r = p/(1 + e \cos \nu)$ yörünge denklemini gerektirir. Radyal etkin potansiyel, dönüm noktalarını ve dairesel-yörünge kararlılığını belirlemek üzere geliştirilmektedir. Kepler’in ikinci ve üçüncü yasaları, vis-viva denklemi ve altı klasik yörünge elemanı aynı değişmezlerden çıkar. Gerçek, dışmerkez ve ortalama anomalileri Kepler denklemi aracılığıyla ilişkilendiriyor ve denklemin Newton–Raphson çözümünü sayısal olarak gösteriyoruz. Uygulamalar arasında Dünya–Güneş hareketi, Hohmann aktarım yörüngeleri, çift-yıldız kütle belirlenmesi ve ek bir ötegezegen radyal-hız örneği bulunmaktadır. Ayrıca gözlemsel testleri, oskülatör elemanları, pertürbasyonları, gelgitleri, ışınım tepkisini ve görelî apsidal presesyonu tartışıyor; yararlı cebirsel ayrıntıları bir ekte topluyoruz.

Anahtar Kelimeler: gök mekaniği; Kepler problemi; iki-cisim problemi; yörünge elemanları; çift yıldızlar; ötegezegenler; aktarım yörüngeleri

1. Giriş

Kepler’in üç yasası, Tycho Brahe’nin gezegen gözlemlerinden ampirik olarak süzölmüş ve 1609 ile 1619 arasında yayımlanmıştır. Bu yasalar, gezegen yörüngelerinin Güneş bir odakta olacak şekilde elipsler olduğunu, yarıçap vektörünün eşit zamanlarda eşit alanlar tarediğini ve yörünge periyodunun karesinin büyük yarı eksenin küpüyle orantılı olduğunu belirtir. Newton’un başarısı, bu yasaların tek bir dinamik ilkedен çıktığını göstermesiydi: kütleler arasında etki eden ters-kare kütleçekim çekimi [2]. Modern dilde Kepler problemi, $\mu = G(m_1 + m_2)$ olmak üzere $-\mu/r$ merkezi potansiyeli tarafından üretilen integrallenebilir iki-cisim problemidir.

Newtoncu türetimin değeri yalnızca tarihsel değildir. Gezegen efemerisleri, spektroskopik ve görsel çift yıldızlar, ötegezegen radyal hızları, pulsar zamanlaması, uzay aracı görev tasarımı ve birikim disklerinin yerel dinamiği için sıfırıncı-mertebe modeli sağlar. Çoğu modern yaklaşım küçük pertürbasyonlar ekler: küresel olmayan kütleçekim alanları, ek cisimler, gaz sürüklenmesi, ışınım basıncı, gelgitsel sönümlenme ve görelî düzeltmeler [7, 6, 5]. Bu inceltmeler en iyi, tam Keplerci yapı açıkça ortaya konduktan sonra anlaşılır.

Bu makale söz konusu yapıyı vektör yöntemleriyle geliştirir. Açısal momentum korunumu tanındıktır ve düzlemselliği ve Kepler’in ikinci yasasını açıklar. Daha az tanıdık, fakat aynı ölçüde belirleyici olan büyüklük, dışmerkezlilik vektörü olarak da adlandırılan Laplace–Runge–Lenz vektörüdür. Bu vektörün korunumu, ters-kare yasasının özel bir simetrisidir ve yörünge hem biçimini hem de yönelimini sabitler. Bu sabitlerden, ikinci mertebeden bir diferansiyel denklemi bileşen bi-

leşen çözmeksizin konik kesitler elde edilir.

Sunum, ileri lisans ve lisansüstü başlangıç düzeyindeki öğrenciler için amaçlanmıştır; ancak türetimler araştırma kullanımına yetecek ayrıntıda yazılmıştır. Metin boyunca kalın semboller vektörleri, şapkalı semboller ise birim vektörleri gösterir. Görelî ayrılma $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$, bunun büyüklüğü $r = |\mathbf{r}|$ ve $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}}$ ’dir. Kütleçekim parametresi

$$\mu \equiv G(m_1 + m_2). \quad (1)$$

Özgül açısal momentum, enerji ve dışmerkezlilik vektörü sırasıyla $\mathbf{h}$, ϵ ve e ile gösterilecektir.

2. Fiziksel ve Matematiksel Çerçeve

2.1. Newtoncu iki-cisim dinamiği

m_1 ve m_2 iki noktasal kütesinin eylemsiz konumları $\mathbf{r}_1$ ve $\mathbf{r}_2$ olsun. Newton’un kütleçekim yasası eşit ve zıt kuvvetler verir:

$$m_1 \ddot{\mathbf{r}}_1 = -Gm_1 m_2 \frac{\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^3}, \quad (2)$$

$$m_2 \ddot{\mathbf{r}}_2 = +Gm_1 m_2 \frac{\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^3}. \quad (3)$$

Kütle merkezi koordinatı

$$\mathbf{R} = \frac{m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2}{m_1 + m_2}, \quad (4)$$

ve görelî koordinat

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2. \quad (5)$$

(2) ve (3) denklemlerini toplamak

$$(m_1 + m_2) \ddot{\mathbf{R}} = \mathbf{0}. \quad (6)$$

sonucunu verir. Böylece kütle merkezi düzgün hareket eder. İvmelerin çıkarılması

$$\ddot{\mathbf{r}} = -G(m_1 + m_2)\frac{\mathbf{r}}{r^3} = -\mu\frac{\mathbf{r}}{r^3}. \quad (7)$$

ifadesini verir. Dolayısıyla tüm yörünge biçimi bilgisi tek görelî denklem (7) içinde yer alır.

Tanım 1. İki-cisim sisteminin indirgenmiş kütlesi

$$m_{\text{red}} = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}. \quad (8)$$

şeklinde. Görelî hareket, $-Gm_1 m_2 / r$ potansiyelinde m_{red} kütleli bir parçacığın hareketi olarak yorumlanabilir.

Bunu görmek için kinetik enerjiyi kütle merkezi ve görelî değişkenler cinsinden yazalım:

$$T = \frac{1}{2}m_1 \dot{\mathbf{r}}_1^2 + \frac{1}{2}m_2 \dot{\mathbf{r}}_2^2, \quad (9)$$

$$T = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{\mathbf{R}}^2 + \frac{1}{2}m_{\text{red}}\dot{\mathbf{r}}^2. \quad (10)$$

Potansiyel enerji

$$U(r) = -\frac{Gm_1 m_2}{r} = -\frac{m_{\text{red}}\mu}{r}. \quad (11)$$

şeklinde. Görelî enerjinin m_{red} 'e bölünmesi özgül enerjiyi verir:

$$\epsilon = \frac{1}{2}v^2 - \frac{\mu}{r}. \quad (12)$$

“Özgül” sıfatı, birim indirgenmiş kütle başına anlamına gelir. Bu uzay dinamiği ve yıldız dinamiğinde standart bir uzlaşım; çünkü yörünge geometrisi, m_{red} 'e ayrı ayrı değil, μ 'ya ve başlangıç görelî faz uzayı koordinatlarına bağlıdır.

2.2. Merkezi kuvvetler ve doğrudan sabitler

(7) denklemindeki kuvvet merkezidir: $\mathbf{r}$ 'ye paraleldir. (7) ile $\mathbf{r}$ 'nin vektörel çarpımını almak

$$\mathbf{r} \times \ddot{\mathbf{r}} = -\mu\frac{\mathbf{r} \times \mathbf{r}}{r^3} = \mathbf{0}. \quad (13)$$

sonucunu verir. Çünkü

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{r} \times \mathbf{v}) = \mathbf{v} \times \mathbf{v} + \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{v}}, \quad (14)$$

olduğundan,

$$\frac{d\mathbf{h}}{dt} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{h} \equiv \mathbf{r} \times \mathbf{v}. \quad (15)$$

elde edilir. $\mathbf{h}$ vektörü özgül açısal momentumdur. Her zaman hem $\mathbf{r}$ 'ye hem de $\mathbf{v}$ 'ye diktir; dolayısıyla yörünge $\mathbf{h}$ 'ye dik sabit düzlemle sınırlıdır.

Enerji korunumu, (7) denkleminin $\mathbf{v}$ ile skaler çarpılmasıyla elde edilir:

$$\mathbf{v} \cdot \dot{\mathbf{v}} = -\mu\frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{r}}{r^3}, \quad (16)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}v^2\right) = -\mu\frac{\dot{r}}{r^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\mu}{r}\right). \quad (17)$$

Bu nedenle

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}v^2 - \frac{\mu}{r}\right) = 0, \quad (18)$$

ki bu tam olarak (12) denklemdir.

Not 1. $\mathbf{h}$ 'nin korunumu dönme simetrisinden, ϵ 'ün korunumu ise zaman öteleme simetrisinden kaynaklanır. Ters-kare kuvveti, kapalı bağlı yörüngelerden sorumlu olan ve Laplace–Runge–Lenz vektörüyle ifade edilen ek bir gizli simetriye sahiptir.

2.3. Radyal indirgeme ve etkin potansiyel

Yörünge düzlemsel olduğundan, $\mathbf{h}$ 'ye dik düzlemde kutupsal koordinatlar tanımlamak yararlıdır. Hız karesi

$$v^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\nu}^2. \quad (19)$$

olarak ayrışır. Açısal-momentum integrali

$$\dot{\nu} = \frac{h}{r^2}. \quad (20)$$

sonucunu verir. (20)'nin (19) içine ve ardından (12) içine konması tek-boyutlu radyal enerji denklemini verir:

$$\frac{1}{2}\dot{r}^2 + U_{\text{eff}}(r) = \epsilon, \quad (21)$$

burada birim indirgenmiş kütle başına etkin potansiyel

$$U_{\text{eff}}(r) = \frac{h^2}{2r^2} - \frac{\mu}{r}. \quad (22)$$

şeklinde. (22) denklemiindeki ilk terim merkezkaç bariyeridir. Bu yeni bir kuvvet değil, açısal momentumun enerjetik sonucudur: $h \neq 0$ olan yörüngeler, enerjileri iraksayan $h^2/(2r^2)$ terimini aşmaya yetecek kadar yüksek olmadıkça $r = 0$ 'a ulaşamaz.

Radyal ivme, (21) denkleminin türevi alınarak ya da (7) kutupsal bileşenlere ayrıştırılarak bulunur:

$$\ddot{r} - \frac{h^2}{r^3} = -\frac{\mu}{r^2}. \quad (23)$$

Dairesel bir yörünge için yarıçapı sabittir, $r = r_c$; dolayısıyla $\dot{r} = \ddot{r} = 0$. O hâlde (23) denklemi

$$h^2 = \mu r_c. \quad (24)$$

sonucunu verir. Eşdeğer olarak, daireesel hız

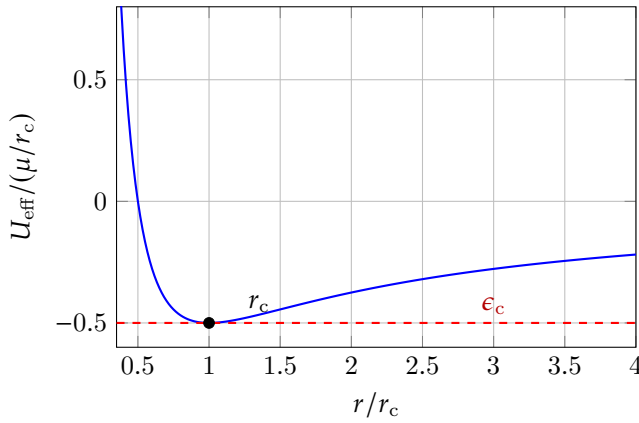
$$v_c = \sqrt{\frac{\mu}{r_c}}. \quad (25)$$

sağlar. Etkin potansiyelin ikinci türevi

$$\frac{d^2 U_{\text{eff}}}{dr^2} = \frac{3h^2}{r^4} - \frac{2\mu}{r^3}. \quad (26)$$

Dairesel yarıçapta (24)

$$\left.\frac{d^2 U_{\text{eff}}}{dr^2}\right|_{r_c} = \frac{\mu}{r_c^3} > 0. \quad (27)$$



Şekil 1. Sabit açısal momentum için etkin potansiyel; minimum $r = r_c = h^2/\mu$ konumunda oluşacak şekilde ölçeklenmiştir. Bağlı radyal hareket, $\epsilon = U_{\text{eff}}(r)$ sağlayan dönüm noktaları arasında gerçekleşir; minimum kararlı dairesel yörünge.

verir. Böylece dairesel Keplerci yörüngeler radyal olarak karardır. r_c etrafındaki küçük radyal salınımların frekansı

$$\kappa = \sqrt{\frac{\mu}{r_c^3}}, \quad (28)$$

olup açısal frekansa eşittir:

$$n_c = \frac{v_c}{r_c} = \sqrt{\frac{\mu}{r_c^3}}. \quad (29)$$

$\kappa = n_c$ eşitliği, neredeyse dairesel Keplerci yörüngelerin bir radyal salınımdan sonra neden kapandığını görmenin başka bir yoludur. Geniş kütle dağılımlarında ya da görelî potansiyellerde bu eşitlik genellikle bozulur ve apsidal çizgi presesyon yapar.

3. Laplace–Runge–Lenz Vektörü ve Yörünge Denklemi

3.1. Dışmerkezlik vektörünün kurulması

(7) denkleminden başlayarak $\mathbf{h}$ ile vektörel çarpım alın:

$$\dot{\mathbf{v}} \times \mathbf{h} = -\mu \frac{\mathbf{r}}{r^3} \times (\mathbf{r} \times \mathbf{v}). \quad (30)$$

$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$ üçlü-çarpım özdeşliğini kullanarak

$$\frac{\mathbf{r}}{r^3} \times (\mathbf{r} \times \mathbf{v}) = \frac{1}{r^3} [\mathbf{r}(\mathbf{r} \cdot \mathbf{v}) - v r^2], \quad (31)$$

$$= \frac{\dot{\mathbf{r}}}{r^2} \mathbf{r} - \frac{1}{r} \mathbf{v}. \quad (32)$$

yazılır. Radyal birim vektör $\hat{\mathbf{r}} = \mathbf{r}/r$ 'nin türevi

$$\frac{d\hat{\mathbf{r}}}{dt} = \frac{\mathbf{v}}{r} - \frac{\mathbf{r}\dot{r}}{r^2}, \quad (33)$$

$$-\frac{d\hat{\mathbf{r}}}{dt} = \frac{\dot{r}}{r^2} \mathbf{r} - \frac{\mathbf{v}}{r}. \quad (34)$$

şeklinde. (30)–(34) birleştirilirse

$$\dot{\mathbf{v}} \times \mathbf{h} = \mu \frac{d\hat{\mathbf{r}}}{dt}. \quad (35)$$

elde edilir. $\dot{\mathbf{h}} = \mathbf{0}$ olduğundan,

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{v} \times \mathbf{h}) = \mu \frac{d\hat{\mathbf{r}}}{dt}. \quad (36)$$

Dolayısıyla

$$\mathbf{e} = \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{h}}{\mu} - \hat{\mathbf{r}} \quad (37)$$

vektörü sabittir.

Tanım 2. (37) denklemindeki sabit $\mathbf{e}$ vektörü dışmerkezlik vektörüdür. Büyüklüğü

$$e = |\mathbf{e}| \quad (38)$$

yörünge dışmerkezliğidir ve dairesel olmayan yörüngelerde yönü periapsise doğru gösterir.

Fiziksel yorum doğrudandır. $\hat{\mathbf{r}}$ vektörü anlık yarıçapı izlerken, $(\mathbf{v} \times \mathbf{h})/\mu$ hız ve açısal momentumu birleştirir. Bu ikisinin farkı yalnızca ters-kare yasası için sabit kalır. Bu sabit vektör yörünge düzleminde tercihli bir yön seçer, genel bir merkezi yörüngenin dönme dejenereliğini kırar ve apsidal çizgiyi durağan kılar.

3.2. Konik denklemin türetilmesi

(37) denklemini $\mathbf{r}$ ile skaler çarpalım:

$$\mathbf{e} \cdot \mathbf{r} = \frac{\mathbf{r} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{h})}{\mu} - r. \quad (39)$$

Skaler üçlü çarpım dögüsel olarak yazılabilir:

$$\mathbf{r} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{h}) = \mathbf{h} \cdot (\mathbf{r} \times \mathbf{v}) = \mathbf{h} \cdot \mathbf{h} = h^2. \quad (40)$$

$\mathbf{v}$, hareket yönünde $\mathbf{e}'$ den $\mathbf{r}'$ 'ye olan açı, yani gerçek anomalî olsun. O hâlde

$$\mathbf{e} \cdot \mathbf{r} = er \cos \nu. \quad (41)$$

(39) içine koymak

$$er \cos \nu = \frac{h^2}{\mu} - r. \quad (42)$$

verir. r için çözümlerse

$$r = \frac{p}{1 + e \cos \nu}, \quad p \equiv \frac{h^2}{\mu}. \quad (43)$$

elde edilir. (43) denklemi, odaklarından biri orijinde olan bir konik kesitin kutupsal denklemdir.

Önerme 1. Newtoncu kütleçekim altındaki görelî yörünge bir konik kesittir. $0 \leq e < 1$ için elips, $e = 1$ için parabol ve $e > 1$ için hiperboldür.

Kanıt. Odağı orijinde, dışmerkezliği e ve yarı latus rektumu p olan bir koniğin kutupsal denklemi tam olarak (43) denklemdir. Koniklerin dışmerkezliğe göre standart sınıflandırması üç durumu verir. $\square$

Periapsiste $v = 0$, elips için apoapsiste ise $v = \pi$ olur. Dolayısıyla

$$r_p = \frac{p}{1+e}, \quad (44)$$

$$r_a = \frac{p}{1-e} \quad (e < 1). \quad (45)$$

Bir elips için

$$a = \frac{r_p + r_a}{2}, \quad (46)$$

$$p = a(1 - e^2). \quad (47)$$

(47) ile $p = h^2/\mu$ birleştirilirse

$$h^2 = \mu a(1 - e^2). \quad (48)$$

elde edilir. Bir hiperbol için çoğu kez $a < 0$ kullanılır; bu durumda

$$p = a(1 - e^2) \quad (49)$$

özdeşliği hâlâ $p > 0$ verir, çünkü $e > 1$ 'dir.

Bir elipsin radyal dönüm noktaları etkin-potansiyel denkleminde de elde edilebilir. (21) içinde $\dot{r} = 0$ koymak

$$\epsilon r^2 + \mu r - \frac{h^2}{2} = 0. \quad (50)$$

verir. $\epsilon < 0$ için iki pozitif kök

$$r_{\pm} = \frac{-\mu \mp \sqrt{\mu^2 + 2\epsilon h^2}}{2\epsilon}. \quad (51)$$

şeklinde. Aşağıdaki (71) kullanılarak bu kökler

$$r_- = \frac{h^2/\mu}{1+e} = r_p, \quad (52)$$

$$r_+ = \frac{h^2/\mu}{1-e} = r_a. \quad (53)$$

biçimine indirgenir. Böylece geometrik apsiler, radyal kinetik enerjinin sıfırlandığı noktalarla aynıdır.

4. Hareket Sabitlerinden Kepler Yasaları

4.1. Kepler'in ikinci yasası

Alansal hız, yarıçap vektörünün yörünge düzleminde alan tarama hızıdır. Bir dt aralığında taranan alan

$$dA = \frac{1}{2} r^2 dv. \quad (54)$$

şeklinde. Yörünge düzlemindeki kutupsal koordinatlarda

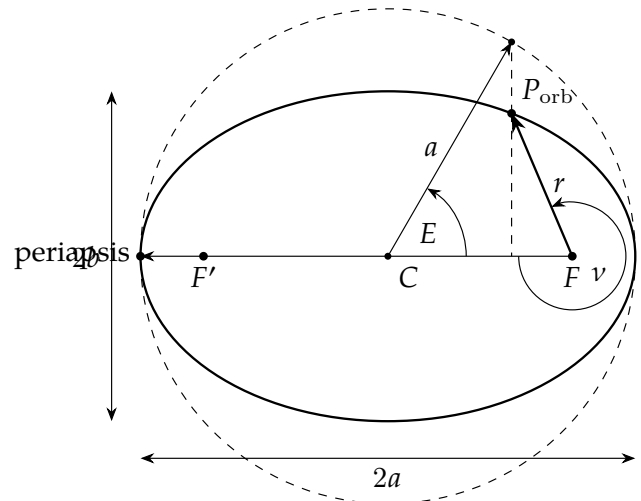
$$\mathbf{v} = \dot{r} \hat{\mathbf{r}} + r \dot{v} \hat{\boldsymbol{\nu}}. \quad (55)$$

Bu nedenle

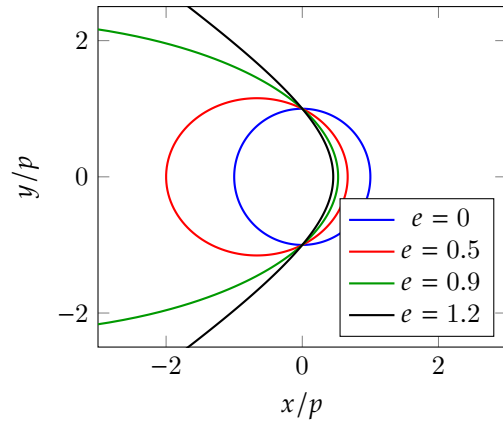
$$h = |\mathbf{r} \times \mathbf{v}| = r^2 \dot{v}. \quad (56)$$

(54) ve (56) birleştirilirse

$$\frac{dA}{dt} = \frac{h}{2}. \quad (57)$$



Şekil 2. Elips geometrisi. Çekici cisim F odağındadır; gerçek anomali v odakta ölçülürken, dışmerkez anomali E yardımcı çember kullanılarak merkezde ölçülür.



Şekil 3. Kutupsal biçimde Keplerci konikler ailesi $r/p = (1 + e \cos v)^{-1}$. Elipsler $e < 1$ için kapanır; hiperbolik kol açıktır ve paydanın sıfırlandığı yerlerde asimptotlara sahiptir.

elde edilir. h sabit olduğundan, dA/dt sabittir. Bu Kepler'in ikinci yasasıdır.

Fiziksel içerik açısal momentum korunumudur. Bir cisim periapsis yakınında r küçük olduğu için hızlı, apoapsis yakınında ise r büyük olduğu için yavaş hareket eder; bu hızlanma ve yavaşlama eşit zamanlarda eşit alanlar taramak için tam gereken orandadır.

4.2. Kepler'in birinci yasası

Bağlı hareket için $e < 1$ olduğunda (43) bir elipstir. Odağı, göreceli koordinatın orijini, yani kuvvet merkezidir. Tam iki-cisim probleminde ne yıldız ne de gezegen mutlak orijinde bulunur; bunun yerine iki cisim de ortak kütle merkezleri etrafında dolar. Göreceli elipslerinin büyük yarı eksen $a = a_1 + a_2$ olup

$$a_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} a, \quad (58)$$

$$a_2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} a. \quad (59)$$

şeklindedir. Dolayısıyla her cisim, aynı periyot ve dış-merkezliğe sahip fakat büyük yarı eksenleri kütleyle ters orantılı olan benzer bir elipsi barisenter etrafında çizer.

4.3. Kepler'in üçüncü yasası

Bir elips için toplam alan

$$A_{\text{ell}} = \pi ab. \quad (60)$$

şeklindedir. Küçük yarı eksen

$$b = a\sqrt{1 - e^2}. \quad (61)$$

sağlar. Alansal hız $h/2$ olduğundan, periyot

$$P = \frac{A_{\text{ell}}}{h/2} = \frac{2\pi a^2 \sqrt{1 - e^2}}{h}. \quad (62)$$

olur. (48) kullanılarak

$$P = \frac{2\pi a^2 \sqrt{1 - e^2}}{\sqrt{\mu a(1 - e^2)}}, \quad (63)$$

$$P = 2\pi \sqrt{\frac{a^3}{\mu}}. \quad (64)$$

elde edilir. Dolayısıyla

$$P^2 = \frac{4\pi^2}{G(m_1 + m_2)} a^3. \quad (65)$$

Bu, Kepler'in üçüncü yasasının Newtoncu biçimidir. Orantı sabiti yalnızca merkezi kütleyi değil, toplam kütleyi içerir. $P^2 \simeq 4\pi^2 a^3 / (Gm_1)$ yaklaşımı ancak $m_2 \ll m_1$ olduğunda geçerlidir.

5. Enerji, Vis-Viva ve Yörünge Sınıflandırması

5.1. Yörünge elemanları cinsinden enerji

Dışmerkezlik vektörü, enerji ile dışmerkezlik arasında yararlı bir bağıntı sağlar. (37) denkleminde

$$\mu e = \mathbf{v} \times \mathbf{h} - \mu \hat{\mathbf{r}}. \quad (66)$$

Büyükliğin karesi alınırsa

$$\mu^2 e^2 = |\mathbf{v} \times \mathbf{h}|^2 - 2\mu \hat{\mathbf{r}} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{h}) + \mu^2. \quad (67)$$

$\mathbf{v}$, $\mathbf{h}$ 'ye dik olduğundan

$$|\mathbf{v} \times \mathbf{h}|^2 = v^2 h^2. \quad (68)$$

Ayrıca

$$\hat{\mathbf{r}} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{h}) = \frac{1}{r} \mathbf{r} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{h}) = \frac{h^2}{r}. \quad (69)$$

Böylece

$$e^2 = 1 + \frac{h^2}{\mu^2} \left(v^2 - \frac{2\mu}{r} \right). \quad (70)$$

$\epsilon = v^2/2 - \mu/r$ kullanılarak

$$e^2 = 1 + \frac{2\epsilon h^2}{\mu^2}. \quad (71)$$

elde edilir. Bu tek denklem yörüngeyi sınıflandırır:

$$\epsilon < 0 \iff 0 \leq e < 1, \quad (72)$$

$$\epsilon = 0 \iff e = 1, \quad (73)$$

$$\epsilon > 0 \iff e > 1. \quad (74)$$

Bir elips için (48), (71) içine konursa

$$e^2 = 1 + \frac{2\epsilon}{\mu^2} \mu a(1 - e^2), \quad (75)$$

$$1 = -\frac{2\epsilon a}{\mu}. \quad (76)$$

elde edilir. Dolayısıyla

$$\epsilon = -\frac{\mu}{2a}. \quad (77)$$

Aynı formül $a < 0$ alınırsa hiperbolik hareket için de geçerlidir ve $\epsilon > 0$ verir.

5.2. Vis-viva denklemi

(77) özgül enerji tanımına yerleştirilirse

$$\frac{1}{2}v^2 - \frac{\mu}{r} = -\frac{\mu}{2a}. \quad (78)$$

elde edilir. v^2 için çözüm vis-viva denklemini verir:

$$v^2 = \mu \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right). \quad (79)$$

Periapsis ve apoapsiste

$$v_p = \sqrt{\mu \frac{1+e}{a(1-e)}}, \quad (80)$$

$$v_a = \sqrt{\mu \frac{1-e}{a(1+e)}}. \quad (81)$$

(79) denklemi gök mekaniğinin en yararlı sonuçlarından biridir. Hızın yerel olarak r tarafından ve küresel olarak enerji ölçeği a tarafından belirlendiğini söyler. Bu nedenle yörünge belirleme ve görev tasarımında merkezî önemdedir.

5.3. Uçuş-yolu açısı ve yerel hız bileşenleri

Yalnızca hızın büyüklüğü hareketin yönünü belirlemez. Radyal ve enine bileşenler, (43) türetilerek ve (56) kullanılarak elde edilir. Çünkü

$$\frac{dr}{dv} = \frac{pe \sin v}{(1 + e \cos v)^2}, \quad (82)$$

radyal hız

$$\dot{r} = \frac{dr}{dv} \dot{v} = \frac{\mu}{h} e \sin v. \quad (83)$$

olur. Enine hız

$$r\dot{v} = \frac{h}{r} = \frac{\mu}{h}(1 + e \cos v). \quad (84)$$

şeklindedir. Böylece

$$v^2 = \left(\frac{\mu}{h}\right)^2 [e^2 \sin^2 v + (1 + e \cos v)^2], \quad (85)$$

ve $p = h^2/\mu$ konduktan sonra vis-viva biçimine indirgenir. Yerel enine yönden hız vektörüne doğru ölçülen uçuş-yolu açısı γ ,

$$\tan \gamma = \frac{\dot{r}}{r\dot{v}} = \frac{e \sin v}{1 + e \cos v}. \quad (86)$$

sağlar. Bu bağıntı yörünge tasarımında rutin olarak kullanılır; çünkü koniğin herhangi bir noktasında gerekli hız vektörünün yönünü verir.

6. Klasik Yörünge Elemanları

6.1. Geometrik tanım

Üç-boyutlu eylemsiz uzayda bir Keplerci yörünge altı klasik elemanla belirlenir:

$$(a, e, i, \Omega, \omega, v). \quad (87)$$

Burada a büyük yarı eksen, e dışmerkezlik, i yörünge düzleminin bir referans düzleme göre eğikliği, Ω yükselen düğüm boylamı, ω periapsis argümanı ve v gerçek anomalidir.

$\hat{k}$ referans düzleme dik birim vektör olsun. Düğüm vektörü

$$\mathbf{n} = \hat{k} \times \mathbf{h}. \quad (88)$$

şeklindedir. O hâlde

$$i = \arccos\left(\frac{h_z}{h}\right), \quad (89)$$

$$\Omega = \text{atan2}(n_y, n_x), \quad (90)$$

$$\omega = \text{atan2}\left(\frac{\mathbf{h} \cdot (\mathbf{n} \times \mathbf{e})}{hne}, \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{e}}{ne}\right), \quad (91)$$

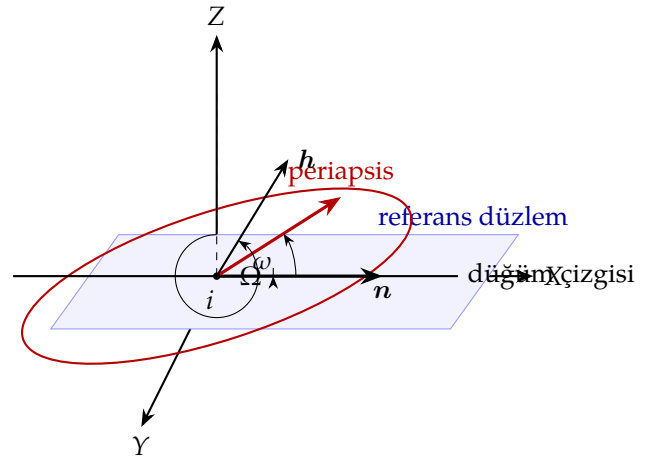
$$v = \text{atan2}\left(\frac{\mathbf{h} \cdot (\mathbf{e} \times \mathbf{r})}{her}, \frac{\mathbf{e} \cdot \mathbf{r}}{er}\right). \quad (92)$$

İki-argümanlı arktanjanant açısı doğru çeyreğe yerleştirir. Dairesel ya da ekvatoryal yörüngeler için bazı açılar tanımsız hâle gelir; bu durumda tekil olmayan eleman kümeleri tercih edilir.

Ters dönüşüm, $\hat{p}$ periapsise ve $\hat{w}$ yörüngeye dik olacak şekilde perifokal çerçevede $(\hat{p}, \hat{q}, \hat{w})$ başlar. Bu çerçevede

$$\mathbf{r}_{\text{pf}} = \frac{p}{1 + e \cos v} \begin{pmatrix} \cos v \\ \sin v \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (93)$$

$$\mathbf{v}_{\text{pf}} = \sqrt{\frac{\mu}{p}} \begin{pmatrix} -\sin v \\ e + \cos v \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (94)$$



Şekil 4. Üç-boyutlu bir referans çerçevesinde klasik yörünge elemanları. Ω , i ve ω açıları yörünge düzlemini ve apsidal çizgiyi yöneltir; gerçek anomali v cismi konik üzerinde konumlandırır.

Eylemsiz vektör dönmelerle elde edilir:

$$\mathbf{r} = R_3(\Omega)R_1(i)R_3(\omega)\mathbf{r}_{\text{pf}}, \quad (95)$$

ve $\mathbf{v}$ için de benzer şekilde:

$$\mathbf{v} = R_3(\Omega)R_1(i)R_3(\omega)\mathbf{v}_{\text{pf}}. \quad (96)$$

6.2. Anomaliler ve Kepler denklemi

Eliptik hareket için dışmerkez anomali E , Şekil 2 içindeki yardımcı çemberle tanımlanır. Elips merkezine göre Kartezyen koordinatlar

$$x_c = a \cos E, \quad (97)$$

$$y_c = b \sin E. \quad (98)$$

şeklindedir. Odak orijin olarak alındığında

$$r = a(1 - e \cos E). \quad (99)$$

$r = a(1 - e^2)/(1 + e \cos v)$ ile karşılaştırma

$$\cos v = \frac{\cos E - e}{1 - e \cos E}, \quad (100)$$

$$\sin v = \frac{\sqrt{1 - e^2} \sin E}{1 - e \cos E}. \quad (101)$$

verir. Eşdeğer olarak

$$\tan \frac{v}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \tan \frac{E}{2}. \quad (102)$$

Ortalama anomali M , periapsis geçişinden itibaren zamanla orantılıdır:

$$M = n(t - \tau), \quad n = \frac{2\pi}{P} = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}}, \quad (103)$$

burada τ periapsis geçiş zamanıdır. M aynı zamanda taranan yörünge alanı kesrinin 2π katı olduğundan, Kepler denklemi elde edilir:

$$M = E - e \sin E. \quad (104)$$

Doğrudan bir türetim alandan gelir. Periapsisten dış-merkez anomali E' ye kadar taranan alan

$$A(E) = \frac{ab}{2}(E - e \sin E). \quad (105)$$

şeklindedir. πab 'ye bölüp 2π ile çarpmak

$$\frac{2\pi A(E)}{\pi ab} = E - e \sin E = M. \quad (106)$$

verir. Böylece ortalama anomalide düzgün hareket fiziksel konuma doğrusal olmayan biçimde eşlenir.

Hiperbolik yörüngeler için yararlı bir analog hiperbolik anomali H' 'dir. $a < 0$ ve $e > 1$ ile

$$r = a(1 - e \cosh H), \quad (107)$$

olur; sağ taraf pozitifdir çünkü $a < 0$ 'dır. Hiperbolik Kepler denklemi

$$M_h = e \sinh H - H, \quad (108)$$

ve

$$M_h = \sqrt{\frac{\mu}{(-a)^3}}(t - \tau). \quad (109)$$

şeklindedir. Gerçek anomali H ile

$$\tan \frac{\nu}{2} = \sqrt{\frac{e+1}{e-1}} \tanh \frac{H}{2}. \quad (110)$$

bağıntısıyla ilişkilidir. Bu formüller, cismin merkezi cisme kütleçekimsel olarak bağlı olmadığı kuyruklu yıldız yakın geçişleri ve kütleçekim yardımlı yörüngeler için esastır.

6.3. Newton–Raphson çözümü

Verilen M ve e için Kepler denklemi,

$$f(E) = E - e \sin E - M. \quad (111)$$

fonksiyonunun kökü bulunarak çözülür. Newton–Raphson yinelemesi

$$E_{j+1} = E_j - \frac{E_j - e \sin E_j - M}{1 - e \cos E_j}. \quad (112)$$

verir. $0 \leq e < 1$ için türev

$$1 - e \leq f'(E) = 1 - e \cos E \leq 1 + e. \quad (113)$$

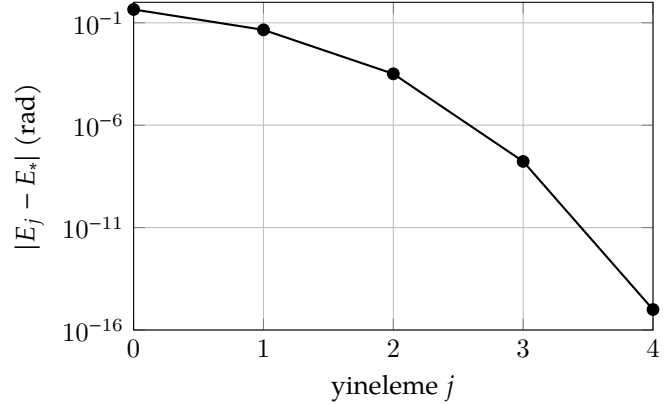
sağlar. Dolayısıyla f kesin artandır ve kök 2π modunda taktır. Yineleme yeterince yaklaştığında hata kuadrattir:

$$|E_{j+1} - E_*| \approx \left| \frac{f''(E_*)}{2f'(E_*)} \right| |E_j - E_*|^2. \quad (114)$$

Küçük ve orta dışmerkezlikler için $E_0 = M$ genellikle yeterlidir. $e \rightarrow 1$ ve M sıfıra yakın olduğunda, $f'(E)$ küçük olabildiği için daha iyi başlangıç değerleri kullanılır.

Tablo 1. $E - 0.7 \sin E = 2.0$ denkleminin Newton–Raphson çözümü. Referans kök $E_* = 2.447683214$ rad değeridir.

j	E_j (rad)	$ E_j - E_* $ (rad)	hata oranı
0	2.000000000	4.4768×10^{-1}	–
1	2.492929991	4.5247×10^{-2}	1.01×10^{-1}
2	2.448005625	3.2241×10^{-4}	7.13×10^{-3}
3	2.447683231	1.70×10^{-8}	5.27×10^{-5}
4	2.447683214	1.0×10^{-15}	5.9×10^{-8}



Şekil 5. Tablo 1 verileri için Newton–Raphson yakınsaması. İkinci yinelemeden sonraki neredeyse düşey düşüş kuadratik yakınsamayı göstermektedir.

7. Çözümlü Sayısal Uygulamalar

7.1. Dünya–Güneş yörüngesi

Şunları alalım:

$$GM_\odot = 1.3271244 \times 10^{20} \text{ m}^3 \text{ s}^{-2}, \quad (115)$$

$$a = 1.4959787 \times 10^{11} \text{ m}, \quad (116)$$

$$e = 0.0167. \quad (117)$$

(64) denkleminde periyot

$$P = 2\pi \sqrt{\frac{a^3}{GM_\odot}} = 3.1558 \times 10^7 \text{ s} = 365.26 \text{ d}. \quad (118)$$

olur. Perihel ve afel uzaklıkları

$$r_p = a(1 - e) = 1.4710 \times 10^{11} \text{ m}, \quad (119)$$

$$r_a = a(1 + e) = 1.5210 \times 10^{11} \text{ m}. \quad (120)$$

şeklindedir. (80)–(81) denklemlerinden karşılık gelen hızlar

$$v_p = 3.03 \times 10^4 \text{ m s}^{-1}, \quad (121)$$

$$v_a = 2.93 \times 10^4 \text{ m s}^{-1}. \quad (122)$$

olur. Kesirsel hız değişimi yalnızca birkaç yüzde düzeyindedir; ancak eşit-alan hareketi için zorunludur. Aynı hesap, yüksek-duyarlıklı yıldız radyal hızlarına uygulanan barisentrik düzeltmenin temelini oluşturur.

7.2. Dairesel yörüngeler arasında Hohmann aktarımı

Hohmann aktarımı, darbelerin apsistelerde teğetsel olarak gerçekleştiği durumda iki dairesel yörünge arasındaki en küçük-darbeli eşdüzlemsel iki-yanma aktarımıdır. Başlangıç ve son dairesel yarıçaplar $r_1 < r_2$ olsun. Aktarım elipsinin

$$a_t = \frac{r_1 + r_2}{2}. \quad (123)$$

büyük yarı eksenini vardır. Dairesel hızlar

$$v_1 = \sqrt{\frac{\mu}{r_1}}, \quad (124)$$

$$v_2 = \sqrt{\frac{\mu}{r_2}}. \quad (125)$$

şeklinde. Periapsis ve apoapsisteki aktarım hızları vis-viva'dan gelir:

$$v_{t1} = \sqrt{\mu \left(\frac{2}{r_1} - \frac{1}{a_t} \right)}, \quad (126)$$

$$v_{t2} = \sqrt{\mu \left(\frac{2}{r_2} - \frac{1}{a_t} \right)}. \quad (127)$$

Gerekli darbeler

$$\Delta v_1 = v_{t1} - v_1, \quad (128)$$

$$\Delta v_2 = v_2 - v_{t2}, \quad (129)$$

$$\Delta v_{\text{tot}} = \Delta v_1 + \Delta v_2. \quad (130)$$

şeklinde. Aktarım süresi, aktarım periyodunun yarısıdır:

$$t_H = \pi \sqrt{\frac{a_t^3}{\mu}}. \quad (131)$$

$r_1 = 6678$ km olan alçak Dünya yörüngesi ve $r_2 = 42164$ km olan jeostasyoner yarıçap için, $\mu_{\oplus} = 3.986004 \times 10^5 \text{ km}^3 \text{ s}^{-2}$ kullanıldığında

$$a_t = 24421 \text{ km}, \quad (132)$$

$$v_1 = 7.73 \text{ km s}^{-1}, \quad (133)$$

$$v_2 = 3.07 \text{ km s}^{-1}, \quad (134)$$

$$v_{t1} = 10.15 \text{ km s}^{-1}, \quad (135)$$

$$v_{t2} = 1.61 \text{ km s}^{-1}. \quad (136)$$

bulunur. Dolayısıyla

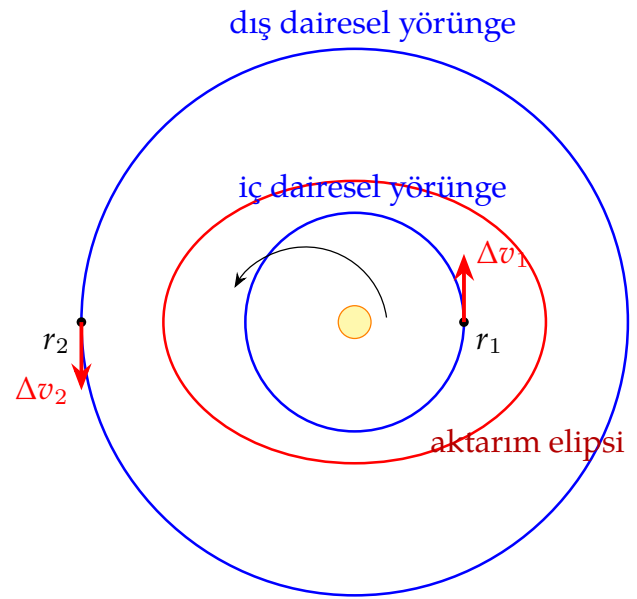
$$\Delta v_1 = 2.42 \text{ km s}^{-1}, \quad (137)$$

$$\Delta v_2 = 1.46 \text{ km s}^{-1}, \quad (138)$$

$$\Delta v_{\text{tot}} = 3.88 \text{ km s}^{-1}, \quad (139)$$

$$t_H = 1.91 \times 10^4 \text{ s} = 5.31 \text{ h}. \quad (140)$$

Bu değerler fırlatma kayıplarını, sonlu-yanma etkilerini, eğiklik değişimlerini ve atmosferik sürüklenmeyi dışarıda bırakır; ancak konik çözümün nasıl pratik bir mühendislik aracına dönüştüğünü gösterir.



Şekil 6. İki dairesel eşdüzlemsel yörünge arasında Hohmann aktarımı. Aktarım elipsi iç yörüngeye periapsiste, dış yörüngeye apoapsiste teğettir.

7.3. Çift yıldız kütle belirlenmesi

Açısal büyük yarı eksenini yay-saniye cinsinden α , uzaklığı parsek cinsinden d ve periyodu yıl cinsinden P olan bir görsel çift için, fiziksel büyük yarı eksen astronomik birim cinsinden

$$a(\text{AU}) = \alpha(\text{arcsec}) d(\text{pc}). \quad (141)$$

olur. $G = 4\pi^2 \text{ AU}^3 \text{ yr}^{-2} M_{\odot}^{-1}$ olan birimler kullanıldığında Kepler'in üçüncü yasası

$$\frac{m_1 + m_2}{M_{\odot}} = \frac{a^3(\text{AU})}{P^2(\text{yr})}. \quad (142)$$

hâline gelir. $\alpha = 0.50''$, $d = 20.0 \text{ pc}$ ve $P = 25.0 \text{ yr}$ olduğunu varsayalım. O zaman

$$a = 10.0 \text{ AU}, \quad (143)$$

$$m_1 + m_2 = \frac{10.0^3}{25.0^2} M_{\odot} = 1.60 M_{\odot}. \quad (144)$$

olur. Barisentrik büyük yarı eksenler ayrı ayrı ölçülür ve $a_1/a_2 = m_2/m_1$ sağlarsa bireysel kütleler elde edilir. Örneğin $a_1/a_2 = 0.60$ ise

$$m_1 = \frac{1}{1 + 0.60} (1.60 M_{\odot}) = 1.00 M_{\odot}, \quad (145)$$

$$m_2 = 0.60 M_{\odot}. \quad (146)$$

bulunur. Bu, yıldız kütlelerinin ölçülmesindeki temel yoldur. Ampirik kütle-ışınım bağıntısını ve yıldız evrimi modellerinin kalibrasyonunu buna dayandırır [8, 9].

7.4. Ötegezegen radyal-hız sinyali

Aynı barisentrik hareket, ötegezegen aramalarında yıldız soğurma çizgilerinin periyodik Doppler kayması

olarak gözlenir [15]. $m_\star$ kütleli bir yıldızın etrafında dolanan m_p kütleli bir gezegen için, yıldızın büyük yarı eksen

$$a_\star = \frac{m_p}{m_\star + m_p} a. \quad (147)$$

olur. Gözlenen görüş doğrultusu hızı, yıldızın yörünge hızının izdüşümüdür. Yarı-genliği

$$K = \frac{2\pi a_\star \sin i}{P\sqrt{1-e^2}}, \quad (148)$$

şeklindedir; burada $(1-e^2)^{-1/2}$ çarpanı dışmerkez elips-teki düzgün olmayan hızı hesaba katar. Kepler'in üçüncü yasasıyla a yok edilirse

$$K = \left(\frac{2\pi G}{P}\right)^{1/3} \frac{m_p \sin i}{(m_\star + m_p)^{2/3}} \frac{1}{\sqrt{1-e^2}}. \quad (149)$$

elde edilir. $m_p \ll m_\star$ olduğunda bu, kullanışlı ölçeklemeye dönüşür:

$$K = 28.4 \text{ m s}^{-1} \left(\frac{m_p \sin i}{M_J}\right) \left(\frac{P}{1 \text{ yr}}\right)^{-1/3} \times \left(\frac{m_\star}{M_\odot}\right)^{-2/3} \frac{1}{\sqrt{1-e^2}}. \quad (150)$$

Burada M_J Jüpiter kütlelerini gösterir. Çözümlü bir örnek olarak, şu parametrelere sahip bir sıcak Jüpiter alalım:

$$P = 3.5247 \text{ d}, \quad (151)$$

$$m_\star = 1.00 M_\odot, \quad (152)$$

$$e = 0, \quad (153)$$

$$m_p \sin i = 0.69 M_J. \quad (154)$$

$P = 9.650 \times 10^{-3}$ yr olduğundan, (150) denklemi

$$K = 28.4(0.69)(9.650 \times 10^{-3})^{-1/3} = 92 \text{ m s}^{-1}. \quad (155)$$

verir. Bu genlik duyarlı spektrograflarla kolayca saptanabilir ve kısa periyotlu dev gezegenlerin radyal-hız yöntemiyle keşfedilen ilk ötegezegenler olmasını açıklar.

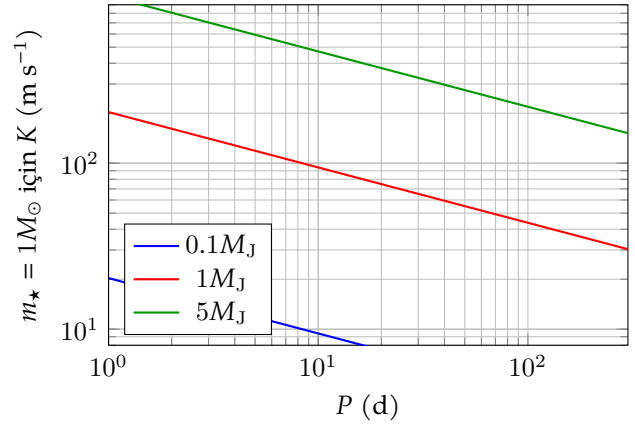
Aynı yörüngenin büyük yarı eksen

$$a = \left(\frac{G m_\star P^2}{4\pi^2}\right)^{1/3} = 7.73 \times 10^9 \text{ m} = 0.0517 \text{ AU}. \quad (156)$$

şeklindedir. Yıldız yarıçapı $R_\star = 1.0 R_\odot$ ise, dairesel bir yörünge için yaklaşık geometrik geçiş olasılığı

$$\mathcal{P}_{\text{tr}} \simeq \frac{R_\star}{a} = \frac{6.96 \times 10^8}{7.73 \times 10^9} = 0.090. \quad (157)$$

olur. Böylece bu büyük yarı eksene sahip rastgele yönelmiş sistemlerin yaklaşık 9%'u geçiş gösterecektir. Keplerci geometri bu nedenle hem Doppler genliğini hem de fotometrinin bir örtülme görme olasılığını belirler.



Şekil 7. Güneş kütleli bir yıldız etrafındaki dairesel, kenardan görülen gezegenler için radyal-hız yarı-genliği. Keplerci ölçekleme $K \propto m_p P^{-1/3}$, büyük kütleli kısa periyotlu gezegenlerin keşfini kolaylaştırır.

8. Genişletmeler, Genellemeler ve Gözlemsel Testler

8.1. Oskülatör elemanlar

Bir pertürbasyon ivmesi mevcut olduğunda, anlık durum $(\mathbf{r}, \mathbf{v})$ yine aynı ϵ , $\mathbf{h}$ ve e formülleri kullanılarak bir Keplerci koniğe eşlenebilir. Ortaya çıkan elemanlara oskülatör elemanlar denir; çünkü konik o anda gerçek yola teğettir. Eğer

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\mu \frac{\mathbf{r}}{r^3} + \mathbf{a}_{\text{pert}}, \quad (158)$$

ise açısal momentum artık tam olarak sabit değildir:

$$\frac{d\mathbf{h}}{dt} = \mathbf{r} \times \mathbf{a}_{\text{pert}}. \quad (159)$$

Enerji şu hızla değişir:

$$\frac{d\epsilon}{dt} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{a}_{\text{pert}}. \quad (160)$$

Dışmerkezlik vektörü

$$\frac{d\mathbf{e}}{dt} = \frac{\mathbf{a}_{\text{pert}} \times \mathbf{h} + \mathbf{v} \times (\mathbf{r} \times \mathbf{a}_{\text{pert}})}{\mu}. \quad (161)$$

uyarınca evrilir. (159)–(161) denklemleri pertürbasyon probleminin kompakt vektör biçimleridir. Hangi fiziksel etkilerin bir yörüngenin boyutunu, biçimini ya da yönelimini değiştirdiğini doğrudan gösterirler. Tamamen enine bir itki hem enerjiyi hem de açısal momentumu verimli biçimde değiştirirken, tamamen radyal bir pertürbasyon tork uygulamaksızın dışmerkezlik vektörünü değiştirir.

8.2. Çift ve gezegen sistemlerinde izdüşüm testleri

Keplerci dinamik birkaç yanlışlanabilir öngöründe bulunur. Çift-çizgili spektroskopik bir çiftte radyal-hız genliklerinin oranı ters kütle oranıdır:

$$\frac{K_1}{K_2} = \frac{m_2}{m_1}. \quad (162)$$

İzdüşürülmüş büyük yarı eksenler

$$a_1 \sin i = \frac{K_1 P}{2\pi} \sqrt{1 - e^2}, \quad (163)$$

$$a_2 \sin i = \frac{K_2 P}{2\pi} \sqrt{1 - e^2}. \quad (164)$$

şeklinde. İkisini toplayıp Kepler'in üçüncü yarasını kullanmak

$$(m_1 + m_2) \sin^3 i = \frac{P(K_1 + K_2)^3}{2\pi G} (1 - e^2)^{3/2}. \quad (165)$$

verir. Örtülmeler $i \simeq 90^\circ$ değerini sabitlerse, kütleler modele bağımlı kestirimler olmaktan çıkıp doğrudan dinamik ölçümlere dönüşür.

Geçiş yapan ötegezegenler için yıldızın ortalama yoğunluğu, ışık eğrisinde ölçülen ölçeklenmiş büyük yarı eksen $a/R_\star$ 'dan çıkarılabilir. Dairesel bir yörünge ve $m_p \ll m_\star$ için

$$\rho_\star = \frac{3\pi}{GP^2} \left(\frac{a}{R_\star} \right)^3. \quad (166)$$

Bu bağıntı güçlü bir tutarlılık testidir: geçiş geometrisinden çıkarılan yoğunluk, yörünge dışmerkez olmadığı ya da ek cisimler zamanlamaları pertürbe etmediği sürece, yıldız modelleri ve spektroskopiyile uyumlu olmalıdır.

9. Tartışma

9.1. Varsayımlar ve geçerlilik sınırları

Türetim kısa bir idealleştirmeler listesine dayanır. Cisimler noktasal kütleler olarak ele alınır, kütleçekim Newtoncudur, başka kütleler kuvvet uygulamaz ve etkileşim ani ve korunumludur. Bu varsayımlar altında iki-cisim problemi tam olarak integrallenebilir. Gerçek astronomik sistemler tam olarak yalıtılmış değildir. Gezegen-gezegen etkileşimleri seküler presesyon ve rezonanslar üretir; geniş cisimler kuadropol ve daha yüksek çokkutup momentlerine sahiptir; yakın çiftler gelgitler ve kütle aktarımı yaşar; küçük cisimler ışınlam baskıncı, Poynting-Robertson sürüklenmesi ve gaz sürüklenmesine maruz kalır; kompakt çiftler kütleçekim dalgaları yayar [11].

Pertürbasyonlar çoğu kez ivme

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\mu \frac{\mathbf{r}}{r^3} + \mathbf{a}_{\text{pert}}. \quad (167)$$

şeklinde yazılarak düzenlenir. Oskülatör elemanlar, gerçek yörüngeye teğet anlık koniğin Keplerci elemanlarıdır. $\mathbf{a}_{\text{pert}}$ küçükse elemanlar yörünge periyoduna kıyasla yavaş evrilir. Bu nedenle Kepler problemi terk edilmez; pertürbasyon kuramı için hareketli temel hâline gelir.

Birincile göre r_3 konumundaki m_3 kütleli üçüncü bir cisim için, $r \ll r_3$ olan yakındaki bir test parçacığı üzerindeki başat gelgitel pertürbasyonun mertebesi

$$a_{\text{tide}} \sim Gm_3 \frac{r}{r_3^3}. \quad (168)$$

şeklinde. Merkezi ivme μ/r^2 'ye göre küçük parametreye

$$\eta_{\text{tide}} \sim \frac{m_3}{m_1} \left(\frac{r}{r_3} \right)^3. \quad (169)$$

olur. Bu boyutsuz kestirim, gezegen-Güneş hareketi için Keplerci elipslerin bir yörünge boyunca neden mükemmel olduğunu, ancak Güneş Sistemi kararlılığı için neden uzun-dönemli integrasyonların gerektiğini açıklar.

9.2. Göreli apsidal presesyon

Genel görelilik, Schwarzschild iki-cisim problemini küçük bir periapsis ilerlemesi ekleyerek değiştirir. Başat post-Newtoncu mertebede yörünge başına ilerleme

$$\Delta\omega_{\text{GR}} = \frac{6\pi G(m_1 + m_2)}{a(1 - e^2)c^2}. \quad (170)$$

şeklinde. Merkür için $a = 0.387$ AU ve $e = 0.2056$ kullanıldığında bu

$$\Delta\omega_{\text{GR}} = 5.02 \times 10^{-7} \text{ rad orbit}^{-1}. \quad (171)$$

verir. Yüzyıl başına yaklaşık 415 yörünge ile

$$\Delta\omega_{\text{GR}} \simeq 43'' \text{ century}^{-1}, \quad (172)$$

Einstein kuramınca açıklanan ünlü anomal presesyon elde edilir [3, 12, 13]. Güneş Sistemi'nde (170) küçük-lüğü $GM/(ac^2) \ll 1$ oranını yansıtır. Nötron yıldızları, kara delikler ve kompakt beyaz-cüce çiftleri çevresinde aynı düzeltme dinamik olarak önemli hâle gelir.

9.3. Kompakt çiftlerde ışınlam tepkisi

Kompakt çiftler için Newtoncu elips durağan değildir; çünkü kütleçekim dalgaları enerji ve açısal momentum taşır. Yörünge-ortalama ışınlam tepkisi klasik Peters denklemlerini verir [11]:

$$\frac{da}{dt} = -\frac{64}{5} \frac{G^3 m_1 m_2 (m_1 + m_2)}{c^5 a^3 (1 - e^2)^{7/2}} \times \left(1 + \frac{73}{24} e^2 + \frac{37}{96} e^4 \right), \quad (173)$$

$$\frac{de}{dt} = -\frac{304}{15} \frac{G^3 m_1 m_2 (m_1 + m_2)}{c^5 a^4 (1 - e^2)^{5/2}} \times \left(1 + \frac{121}{304} e^2 \right). \quad (174)$$

Yalıtılmış bir çift için hem a hem de e azalır. Ayrılma büyükken içe sarmal hareket yavaşır; fakat a küçüldükçe hızla ivmelenir, çünkü küçük e için $da/dt \propto a^{-3}$ olur. Bu, korunumlu Kepler probleminin sönümlü karşılığıdır: her anda çift neredeyse Keplercidir; ancak hareket sabitleri seküler olarak sürüklenir.

9.4. Gözlemlerle karşılaştırma ve modern gelişmeler

Keplerci dinamik; gezegen efemerislerinde, görsel çift yörüngelerinde, spektroskopik çift radyal-hız eğrilerinde ve ötegezegen geçiş zamanlamasında doğrudan gö-

rünür. Tek-çizgili spektroskopik bir çift kütle fonksiyonunu verir:

$$f(m) = \frac{PK_1^3(1-e^2)^{3/2}}{2\pi G} = \frac{m_2^3 \sin^3 i}{(m_1 + m_2)^2}, \quad (175)$$

burada K_1 radyal-hız yarı-genliğidir. Bu bağıntı basitçe Kepler'in üçüncü yasası ile izdüşüm geometrisinin birleşimidir. Örtülmeler ya da astrometri i 'yi verdiğinde bireysel kütleler elde edilebilir.

Galaktik dinamikte aynı ters-kare iki-cisim sonucu çoğu kez değişiklik yapılmadan uygulanmaz; çünkü yıldızlar çok sayıda cismin kolektif potansiyeli içinde hareket eder [10]. Bununla birlikte yerel karşılaşmalar, gelgitsel parçalanma olayları, geniş çiftler ve Galaksi merkezi kara deliğinin etrafında dolanan yıldızlar, başat model olarak Keplerci elemanlarla yorumlanır. Kozmolojide ve yapı oluşumunda kütleçekim dinamiği çok-cisimli ve çarpışmasız hâle gelir; ancak Newtoncu kuvvet yasası, görelî-olmayan madde için ufuk-altı sınır olarak kalır [16]. Kepler problemi bu nedenle hem çözülmüş bir problem hem de kalıcı bir yapı taşıdır.

10. Sonuç

Newton'un ters-kare kütleçekim yasasından başlayarak iki-cisim problemi, merkezi bir potansiyelde indirgenmiş kütleli bir parçacığın görelî hareketine tam olarak indirgenir. Özgül açısal momentumun korunumu yörünge düzlemini sabitler ve Kepler'in eşit-alan yasasını gerektirir. Enerji korunumu vis-viva denklemini ve $\epsilon = -\mu/(2a)$ bağıntısını verir. Etkin potansiyel radyal dönüm noktalarını belirler ve dairesel yörüngelelerin kararlılığını gösterir. Ek Laplace–Runge–Lenz vektörü apsidal yönü sabitler ve konik yörünge denklemini $r = p/(1 + e \cos \nu)$ 'yü doğrudan verir. Bağlı yörüngeler eliptik; parabolik yörüngelerin enerjisi sıfırdır ve hiperbolik yörüngelerin enerjisi pozitifdir.

Kepler'in üçüncü yasası, sabit alansal hız ile elips alanının birleştirilmesiyle çıkar ve $P^2 = 4\pi^2 a^3/[G(m_1 + m_2)]$ sonucunu verir. Bu toplam-kütle bağımlılığı çift-yıldız astrofiziğinde ve ötegezegen radyal-hız çalışmalarında esastır. Klasik yörünge elemanları uzaydaki Keplerci bir yörünge için kompakt geometrik betimini sağlar. Kepler denklemini düzgün zaman evrimini elips üzerindeki konuma bağlar. Newton–Raphson yinelemesi bu denklemleri olağan dışmerkezlilikler için hızla çözer. Hohmann aktarımları, çift kütle ölçümleri ve ötegezegen Doppler genlikleri aynı analitik çerçevenin uzay aracı dinamiğine, yıldız astrofiziğine ve gezegen bilimine nasıl hizmet ettiğini gösterir. Pertürbasyonlar ve görelilik Keplerci çözümü değiştirir, fakat onun yerini almaz: oskülatör konik gök mekaniği için doğal referans durum olarak kalır.

A. Eliptik Hareket için Yardımcı Cebir

Bu ek, özlü sunumlarda çoğu kez atlanan cebirsel adımları toplar. Odağı orijine ve büyük eksen x -ekseni üzerine, periapsisi ise pozitif x yönüne yerleştirilim. Elip-

sin merkezi odaktan $-ae$ kadar yer değiştirmiştir; bu nedenle dışmerkez-anomali parametreleştirme

$$x = a(\cos E - e), \quad (176)$$

$$y = b \sin E. \quad (177)$$

verir. Odaktan olan yarıçap bu nedenle

$$r^2 = a^2(\cos E - e)^2 + b^2 \sin^2 E, \quad (178)$$

$$= a^2 [(\cos E - e)^2 + (1 - e^2) \sin^2 E], \quad (179)$$

$$= a^2(1 - e \cos E)^2. \quad (180)$$

Pozitif karekök alınırsa

$$r = a(1 - e \cos E), \quad (181)$$

elde edilir; bu (99) denklemdir.

Gerçek anomali $x = r \cos \nu$ ve $y = r \sin \nu$ sağlar. (176)–(181) denklemleri

$$\cos \nu = \frac{a(\cos E - e)}{a(1 - e \cos E)}, \quad (182)$$

$$\sin \nu = \frac{a\sqrt{1 - e^2} \sin E}{a(1 - e \cos E)}. \quad (183)$$

sonucunu verir. (183) denklemini, olağan yarım-açı özdeşliği içinde $1 + (182)$ ile bölmek

$$\tan \frac{\nu}{2} = \frac{\sin \nu}{1 + \cos \nu} = \sqrt{\frac{1 + e}{1 - e}} \tan \frac{E}{2}. \quad (184)$$

verir.

Kepler denkleminin türetilmesinde kullanılan alan formülü de doğrudan doğrulanabilir. Odaktan parçacığa yarıçapın taradığı alan

$$A(E) = \frac{1}{2} \int_0^E \left(x \frac{dy}{dE'} - y \frac{dx}{dE'} \right) dE'. \quad (185)$$

şeklinde. Şunlar kullanılırsa

$$\frac{dx}{dE} = -a \sin E, \quad (186)$$

$$\frac{dy}{dE} = b \cos E, \quad (187)$$

integrand

$$x \frac{dy}{dE} - y \frac{dx}{dE} = ab(1 - e \cos E). \quad (188)$$

olur. Dolayısıyla

$$A(E) = \frac{ab}{2} \int_0^E (1 - e \cos E') dE' = \frac{ab}{2} (E - e \sin E), \quad (189)$$

ve (105) içinde kullanıldığı biçim elde edilir. Son olarak, toplam alan πab olduğundan, periyodun geçen kesri

$$\frac{t - \tau}{P} = \frac{A(E)}{\pi ab} = \frac{E - e \sin E}{2\pi}, \quad (190)$$

olur; bu Kepler denkleminde eşdeğerdir.

B. Dönme Matrisleri ve Durum Vektörleri

(95) ve (96) içindeki dönmeler açıkça

$$R_3(\phi) = \begin{pmatrix} \cos \phi & -\sin \phi & 0 \\ \sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (191)$$

ve

$$R_1(i) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos i & -\sin i \\ 0 & \sin i & \cos i \end{pmatrix}. \quad (192)$$

olarak yazılabilir. Birleşik dönüşüm

$$Q = R_3(\Omega)R_1(i)R_3(\omega) \quad (193)$$

ortonormal sütunlara sahiptir. İlk iki sütunu, perifokal birim vektörler $\hat{p}$ ve $\hat{q}$ 'nin eylemsiz bileşenleridir:

$$\hat{p} = \begin{pmatrix} \cos \Omega \cos \omega - \sin \Omega \sin \omega \cos i \\ \sin \Omega \cos \omega + \cos \Omega \sin \omega \cos i \\ \sin \omega \sin i \end{pmatrix}, \quad (194)$$

$$\hat{q} = \begin{pmatrix} -\cos \Omega \sin \omega - \sin \Omega \cos \omega \cos i \\ -\sin \Omega \sin \omega + \cos \Omega \cos \omega \cos i \\ \cos \omega \sin i \end{pmatrix}. \quad (195)$$

Sonuç olarak eylemsiz konum matrisler olmadan

$$\mathbf{r} = r(\cos \nu \hat{p} + \sin \nu \hat{q}), \quad (196)$$

ve eylemsiz hız

$$\mathbf{v} = \sqrt{\frac{\mu}{p}} [-\sin \nu \hat{p} + (e + \cos \nu) \hat{q}]. \quad (197)$$

şeklinde yazılabilir. Bu formüller çoğu kez yörünge elemanlarından Kartezyen başlangıç koşullarına eşlemenin en kullanışlı uygulamasıdır.

Kaynaklar

- [1] J. Kepler, *Astronomia Nova*, Prague, 1609.
- [2] I. Newton, *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*, London, 1687.
- [3] A. Einstein, "Erklärung der Perihelbewegung des Merkur aus der allgemeinen Relativitätstheorie," *Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften*, 831–839, 1915.
- [4] S. Chandrasekhar, *Principles of Stellar Dynamics*, Dover, New York, 1960.
- [5] H. Goldstein, C. Poole, and J. Safko, *Classical Mechanics*, 3. baskı, Addison-Wesley, San Francisco, 2002.
- [6] J. M. A. Danby, *Fundamentals of Celestial Mechanics*, 2. baskı, Willmann-Bell, Richmond, 1988.
- [7] C. D. Murray and S. F. Dermott, *Solar System Dynamics*, Cambridge University Press, Cambridge, 1999.
- [8] B. W. Carroll and D. A. Ostlie, *An Introduction to Modern Astrophysics*, 2. baskı, Cambridge University Press, Cambridge, 2017.
- [9] R. Kippenhahn, A. Weigert, and A. Weiss, *Stellar Structure and Evolution*, 2. baskı, Springer, Berlin, 2012.
- [10] J. Binney and S. Tremaine, *Galactic Dynamics*, 2. baskı, Princeton University Press, Princeton, 2008.
- [11] P. C. Peters, "Gravitational radiation and the motion of two point masses," *Physical Review*, **136**, B1224–B1232, 1964.
- [12] S. Weinberg, *Gravitation and Cosmology*, Wiley, New York, 1972.
- [13] C. W. Misner, K. S. Thorne, and J. A. Wheeler, *Gravitation*, W. H. Freeman, San Francisco, 1973.
- [14] R. R. Bate, D. D. Mueller, and J. E. White, *Fundamentals of Astrodynamics*, Dover, New York, 1971.
- [15] M. Mayor and D. Queloz, "A Jupiter-mass companion to a solar-type star," *Nature*, **378**, 355–359, 1995.
- [16] Planck Collaboration, "Planck 2018 results. VI. Cosmological parameters," *Astronomy & Astrophysics*, **641**, A6, 2020.