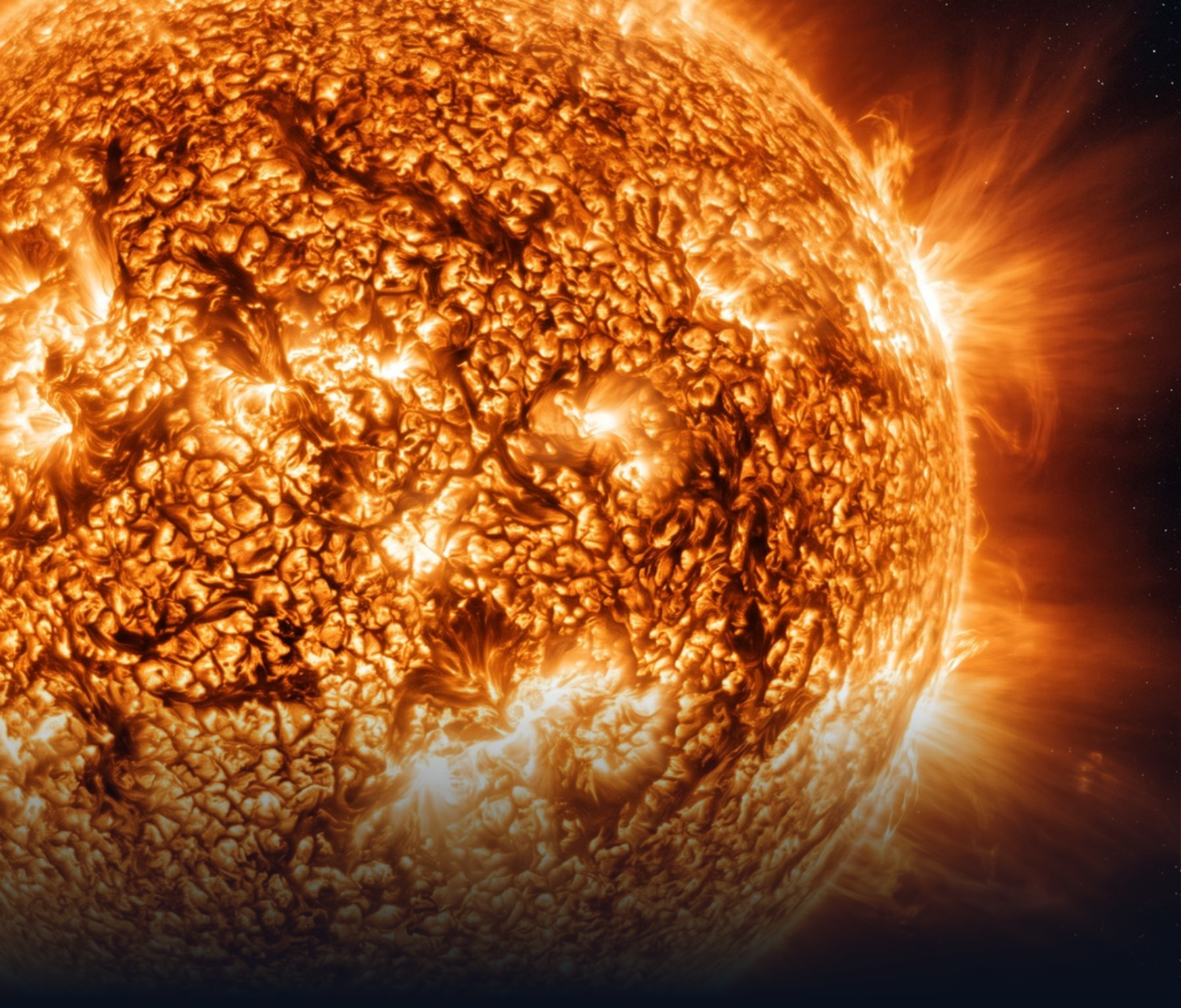




IŞINSAL TRANSFER

Saha-Boltzmann Denklemleri, Gri Atmosfer Modeli ve Eddington Yaklaşımının Analitik Türetimi

Akademik Araştırma Makalesi

Teorik Astrofizik — Adım Adım Analitik Türetimler, Vektör Diyagramları ve Sayısal Tablolar

Saha-Boltzmann Denklemleri, Gri Atmosfer Modeli ve Eddington Yaklaşımının Analitik Türetimi

Işınsal Transfer

Eylül 2026

Özet. Işınsal aktarım, mikroskobik atom fiziğini yıldızların ortaya çıkan tayfları ve renkleriyle ilişkilendirir. Bu makale, Saha-Boltzmann denklemlerinin, gri atmosfer modelinin ve Eddington yaklaşımının kendi kendine yeterli analitik bir türetimini sunar ve her sonucun hangi varsayımlar altında geçerli olduğunu vurgular. Özgül şiddetin açılal momentleriyle başlayarak ortalama şiddet, akı ve ışınım basıncı arasındaki bağıntıları türetiyoruz. Boltzmann uyarılma formülü istatistik ağırlıklardan ve bölüşüm fonksiyonundan elde edilir; ardından Saha iyonlaşma denklemi, aynı denge sayma argümanı serbest elektronların sürekli faz uzayına uygulanarak türetilir. Sonucu sabit elektron basıncında hidrojene uyguluyor ve Balmer soğurmasının neden A-tipi yıldız sıcaklıkları civarında en güçlü olduğunu gösteriyoruz. Daha sonra aktarım denklemini, optik derinliği, biçimsel çözümü, düzlem-paralel bir atmosfer için moment denklemlerini, gri ışınsal-denge çözümünü ve Eddington sıcaklık yasasını türetiyoruz. Ek türetimler katkı fonksiyonlarını, Eddington-Barbier bağıntısını, difüzyon taşınımını ve optik derinlik ile gaz basıncı arasındaki ilişkiyi açıklığa kavuşturur. Çözümlü sayısal örnekler ve gözlemsel sınamalar, klasik gri atmosferin hem kullanışlılığını hem de sınırlılıklarını gösterir.

Anahtar Kelimeler: ışınsal aktarım; yıldız atmosferleri; Saha denklemi; Boltzmann uyarılması; gri atmosfer; Eddington yaklaşımı

1. Giriş

Bir yıldızın görünür yüzeyi maddesel bir sınır değildir. Bu yüzey, fotonların daha fazla etkileşmeden kaçma olasılığının bir mertebesinde olduğu bölgedir. Bu nedenle bir gözlemciye ulaşan tayf, sonlu bir optik derinlik aralığı boyunca sıcaklık, yoğunluk, iyonlaşma dengesi, opaklık ve hızın yerel olmayan bir tanılayıcısıdır. Yıldız atmosferlerinin analitik kuramı, bu ifadeyi nicel hâle getirmek için geliştirilmiştir. Klasik bileşenleri Kirchhoff'un ısı yayım yasası, Planck'ın ışınım yasası, bağlı düzeylerin Boltzmann dağılımı, Saha'nın ısı iyonlaşma kuramı ve Schwarzschild, Eddington, Milne ve Chandrasekhar tarafından geliştirilen ışınsal aktarımın moment betimlemesidir [1, 2, 4, 6, 5, 7].

Temel fiziksel güçlük, ışınım alanının yönlü olmasıdır. Maxwell-Boltzmann dağılımının genellikle izotropik olduğu yerel termodinamik dengedeki bir gazın aksine, bir atmosferde fotonlar tercihen dışarı doğru akar. Yerel madde termodinamik dengeye yakın olabilir; bu durumda yayma ve soğurma özellikleri bir sıcaklık tarafından belirlenir, ancak ışınım alanının kendisi genel olarak bir karacısım alanı değildir. Dolayısıyla özgül şiddet I_ν , merkezi niceliktir: birim alan, zaman, frekans ve katı açı başına enerjiyi ölçer ve yön bilgisini korur. Açılal momentleri ortalama şiddeti J_ν , ışınsal akıyı F_ν ve ışınım basıncını P_ν tanımlar.

Bu makalenin ilk yarısı gazın termodinamik durumuyla ilgilidir. Boltzmann denklemi bağlı atomik düzeylerin görelî popülasyonlarını belirler. Saha denklemi, aynı istatistik-mekanik mantığı serbest-elektron durumlarının sürekliğine uygulayarak ardışık iyonlaşma basamaklarının oranını belirler. Bunların birleşimi tayfsal sınıflandırmayı açıklar: güçlü bir çizgi, hem ilgili iyonun kayda değer bolluğunu hem de geçişin alt dü-

zeyinde kayda değer bir popülasyonu gerektirir. Örneğin hidrojen Balmer çizgileri soğuk yıldızlarda zayıftır, çünkü az sayıda atom $n = 2$ düzeyini işgal eder; sıcak yıldızlarda da zayıftır, çünkü hidrojen iyonlaşmıştır. $T \approx 9500\text{--}10500\text{ K}$ civarındaki maksimum güçleri, uyarılma ile iyonlaşma arasındaki rekabetten doğal olarak doğar [11, 12].

İkinci yarı ışınımın kaçışıyla ilgilidir. Bir ışın boyunca aktarım denklemi sönüm ile yayımı dengeler. Optik derinlik koordinatlarında yazıldığında, optik derinliğin bir foton sağkalım değişkeni olarak anlamını açığa çıkaran biçimsel bir integral çözümü kabul eder. Düzlem-paralel bir atmosferde aktarım denklemi açı üzerinden integre edilerek moment denklemleri üretilebilir. Gri opaklık, ışınsal denge ve Eddington kapanışı $K = J/3$ ile bu moment denklemleri klasik gri sıcaklık yapısını verir:

$$T^4(\tau) = \frac{3}{4} T_{\text{eff}}^4 \left(\tau + \frac{2}{3} \right). \quad (1)$$

Bu sonuç hem dikkate değer ölçüde kullanışlı hem de derinden yaklaşıksaldır. Standart fotosfer koşulu $\tau = 2/3$ değerini verir, basit bir kenar kararması yasası ön-görür ve yıldız-yapısı sınır koşulları için ilk analitik atmosferi sağlar. Bununla birlikte gerçek yıldız atmosferleri gri değildir, frekansa bağımlıdır, birçok katmanda konvektiftir ve çoğu kez yerel termodinamik dengeden sapmalardan etkilenir. Modern atmosfer kodları frekans ve açıya bağımlı aktarım problemini sayısal olarak çözer [8, 15]; ancak analitik gri çözüm, bu hesaplamaların anlaşılmasını sağlayan kavramsal omurga olmaya devam eder.

2. Fiziksel ve Matematiksel Çerçeve

Tanım 1 (Özgül şiddet). Tekrenkli özgül şiddet $I_\nu(\mathbf{x}, \hat{\mathbf{n}}, t)$, $\hat{\mathbf{n}}$ yönü etrafındaki $d\Omega$ katı açısı, $d\nu$ frekans aralığı ve dt zamanı içinde yönlendirilmiş bir dA alan elemanından geçen enerjinin

$$dE_\nu = I_\nu \cos \theta dA dt d\nu d\Omega, \quad (2)$$

olacağı biçimde tanımlanır; burada θ , $\hat{\mathbf{n}}$ ile yüzey normali arasındaki açıdır.

Boyutlar

$$[I_\nu] = \text{erg s}^{-1} \text{cm}^{-2} \text{Hz}^{-1} \text{sr}^{-1}. \quad (3)$$

şeklinde. Şiddetin tanımlayıcı özelliği boşlukta geometrik değişmezliktir: Öklid uzayında, soğurma veya yayım yoksa, I_ν bir ışın boyunca sabittir. Akının geometrik seyrelmesi şiddetteki bir azalmadan değil, kaynağın kapladığı katı açının küçülmesinden kaynaklanır.

Tercihli düşey doğrultusu olan bir atmosfer için

$$\mu = \cos \theta. \quad (4)$$

yazalım. Sıfıncı, birinci ve ikinci açısal momentler

$$J_\nu = \frac{1}{4\pi} \int I_\nu d\Omega, \quad (5)$$

$$H_\nu = \frac{1}{4\pi} \int \mu I_\nu d\Omega, \quad (6)$$

$$K_\nu = \frac{1}{4\pi} \int \mu^2 I_\nu d\Omega. \quad (7)$$

ile tanımlanır. Karşılık gelen fiziksel akı ve ışınım basıncı

$$F_\nu = \int \mu I_\nu d\Omega = 4\pi H_\nu, \quad (8)$$

$$P_\nu = \frac{1}{c} \int \mu^2 I_\nu d\Omega = \frac{4\pi}{c} K_\nu. \quad (9)$$

şeklinde. Işınım enerji yoğunluğu

$$u_\nu = \frac{1}{c} \int I_\nu d\Omega = \frac{4\pi}{c} J_\nu. \quad (10)$$

olur.

Not 1. J_ν açılı ortalamalı ışınımsal enerji yoğunluğunu, H_ν net taşınımı ve K_ν momentum akısının normal bileşenini ölçer. İzotropik bir ışınım alanında $F_\nu = 0$ olur, ancak basınç sıfır değildir.

İzotropik bir alan $I_\nu = I_{\nu,0}$ için doğrudan integrasyon

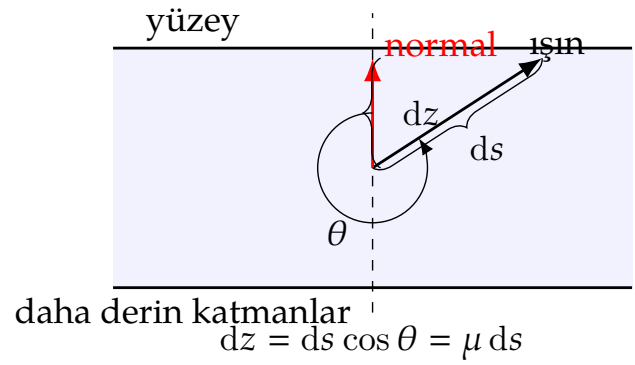
$$J_\nu = I_{\nu,0}, \quad (11)$$

$$H_\nu = 0, \quad (12)$$

$$K_\nu = \frac{I_{\nu,0}}{4\pi} \int \mu^2 d\Omega = \frac{I_{\nu,0}}{3}. \quad (13)$$

sonucunu verir. Dolayısıyla izotropik ışınım için

$$P_\nu = \frac{u_\nu}{3} \quad (14)$$



Şekil 1. Düzlem-paralel bir tabakada ışın geometrisi. Düşey koordinat z katmanlara normaldir; s ise ışın boyunca uzaklığı ölçer. Yön kosinüsü $\mu = \cos \theta$ olduğundan $dz = \mu ds$ olur.

olur. Eddington yaklaşımı, $K_\nu \approx J_\nu/3$ koyarak bu tam izotropik bağıntıyı hafif anizotropik ışınımına genişletir.

Karacisim şiddeti Planck fonksiyonudur:

$$B_\nu(T) = \frac{2h\nu^3}{c^2} \left[\exp\left(\frac{h\nu}{kT}\right) - 1 \right]^{-1}. \quad (15)$$

Frekans integrali

$$B(T) = \int_0^\infty B_\nu d\nu = \frac{\sigma}{\pi} T^4, \quad (16)$$

olur; burada σ Stefan-Boltzmann sabitidir. Termodinamik dengede $I_\nu = B_\nu$, $J_\nu = B_\nu$ olur ve bir sıcaklık gradyanı küresel dengeyi bozmadıkça net akı bulunmaz.

Işınım sabiti a , izotropik karacisim enerji yoğunluğunun frekans üzerinden integre edilmesiyle tanımlanır:

$$u_{\text{rad}} = \frac{4\pi}{c} B(T) = aT^4, \quad (17)$$

böylece

$$a = \frac{4\sigma}{c}. \quad (18)$$

Karşılık gelen denge ışınım basıncı

$$P_{\text{rad}} = \frac{1}{3} aT^4. \quad (19)$$

olur. P_{rad} Güneş fotosferinde gaz basıncıyla karşılaştırıldığında küçük olsa da büyük kütleli yıldızlarda, yıldız disklerinde ve ışınım-baskın zarflarda dinamik açıdan önemli hâle gelir [6, 13].

3. İstatistik Ağırlıklardan Boltzmann Uyarılması

T sıcaklığında yerel termodinamik dengede bulunan tek bir türe ait atomları veya iyonları ele alalım. i düzeyinin temel durumdan ölçülen uyarılma enerjisi ϵ_i ve dejenereliği, ya da istatistik ağırlığı, g_i olsun. Kanonik toplulukta enerjisi ϵ_i olan belirli bir kuantum durumunun işgal olasılığı $\exp(-\epsilon_i/kT)$ ile orantılıdır. i düzeyi g_i durum içerdiğinden, düzey popülasyonu

$$n_i \propto g_i \exp\left(-\frac{\epsilon_i}{kT}\right). \quad (20)$$

ile orantılıdır. İyonlaşma basamağının tüm bağlı düzeyleri üzerinden normalizasyon, bölüşüm fonksiyonunu verir:

$$U(T) = \sum_i g_i \exp\left(-\frac{\epsilon_i}{kT}\right). \quad (21)$$

n , iyonlaşma basamağındaki toplam sayı yoğunluğu ise

$$n = \sum_i n_i. \quad (22)$$

olur. (20)–(22) denklemlerinin birleştirilmesi

$$\frac{n_i}{n} = \frac{g_i}{U(T)} \exp\left(-\frac{\epsilon_i}{kT}\right). \quad (23)$$

sonucunu verir. Aynı iyonun iki düzeyi i ve j için

$$\frac{n_j}{n_i} = \frac{g_j}{g_i} \exp\left[-\frac{\epsilon_j - \epsilon_i}{kT}\right]. \quad (24)$$

Not 2. Denklem (23), uyarılmanın dejenerelik ile Boltzmann bastırılması arasındaki rekabet tarafından denetlendiğini söyler. Yüksek düzeyler büyük istatistik ağırlıklara sahip olabilir; ancak $\epsilon_i \gg kT$ ise popülasyonları küçük kalır.

Hidrojen-benzeri bağlı düzeyler için

$$g_n = 2n^2, \quad (25)$$

ve temel duruma göre uyarılma enerjisi

$$\epsilon_n = 13.598 \text{ eV} \left(1 - \frac{1}{n^2}\right). \quad (26)$$

şeklinde. Dolayısıyla $n = 2$ düzeyi

$$\epsilon_2 = 10.199 \text{ eV}. \quad (27)$$

enerjisindedir. Nötr hidrojen bölüşüm fonksiyonunu temel düzey katkısıyla, $U_H \approx g_1 = 2$, yaklaştırmak

$$\frac{n_2}{n_{H^0}} \approx \frac{8}{2} \exp\left(-\frac{10.199 \text{ eV}}{kT}\right). \quad (28)$$

sonucunu verir. $T = 9500 \text{ K}$ için $kT = 0.818 \text{ eV}$ ve dolayısıyla

$$\frac{n_2}{n_{H^0}} \approx 4 \exp(-12.47) = 1.54 \times 10^{-5}. \quad (29)$$

Nötr atomların yalnızca çok küçük bir kesri $n = 2$ düzeyini işgal eder; ancak bu kesir daha soğuk yıldızlardakinden çok daha büyüktür.

Boltzmann formülünün geçerliliğine ilişkin yararlı bir tanı, çarpışmalı ve ışımsal geçiş hızlarının karşılaştırılmasıdır. Bir alt düzey l ve üst düzey u için LTE, yukarı ve aşağı süreçlerin yerel çarpışmalar veya Planckçı bir ışımsal alanı tarafından baskın kılınmasını gerektirir. Atom başına çarpışmalı uyarılma giderme hızı

$$C_{ul} = n_e q_{ul}(T), \quad (30)$$

şeklinde yazılabilir; burada q_{ul} bir çarpışmalı hız katsayısıdır. C_{ul} ile kendiliğinden geçiş hızı A_{ul} eşitlenerek kaba bir kritik yoğunluk elde edilir:

$$n_{\text{crit}} = \frac{A_{ul}}{q_{ul}(T)}. \quad (31)$$

$n_e \gg n_{\text{crit}}$ olduğunda, çarpışmalar düzeyleri yerel kinetik sıcaklığa güçlü biçimde bağlar. $n_e \ll n_{\text{crit}}$ olduğunda ise düzey popülasyonları yerel olmayan ışımsal alanı tarafından denetlenir ve Boltzmann oranı geçerli olmak zorunda değildir. Bu basit karşılaştırma, LTE'nin derin fotosferik katmanlarda neden çoğu kez yeterli olduğunu; buna karşılık kromosferlerde, rüzgârlarda ve bulutlarda neden başarısız olduğunu açıklar.

4. Sürekli Durumlardan Saha İyonlaşması

Saha denklemi çoğu kez bağımsız bir sonuç olarak verilir; ancak üst “düzeyin” iyon artı serbest elektron durumlarının sürekli olduğu bir Boltzmann denklemi olarak türetildiğinde en saydam biçimini alır. İyonlaşma basamağı r ile bir sonraki basamak $r + 1$ ele alınsın:

$$X^r \rightleftharpoons X^{r+1} + e^-. \quad (32)$$

χ_r , r basamağının temel durumundan iyonlaşma enerjisi olsun. Momentumu p ile $p + d^3p$ arasında olan bir serbest elektronun kinetik enerjisi

$$\epsilon_p = \frac{p^2}{2m_e}. \quad (33)$$

olur. Faz uzayında birim hacim başına tek parçacıklı öteleme durumlarının sayısı

$$\frac{d^3p d^3x}{h^3}. \quad (34)$$

şeklinde. Birim hacim başına, elektron spin dejenereliği 2 dâhil edildiğinde, d^3p içindeki elektron durum yoğunluğu

$$\frac{2 d^3p}{h^3}. \quad (35)$$

olur.

Birleşik iyon-artı-elektron sürekliusunun istatistik ağırlığı, iyonik iç bölüşüm fonksiyonu U_{r+1} ile serbest elektron durum sayısının çarpımıdır. Bölüşüm fonksiyonu U_r olan alt iyonlaşma basamağına göre diferansiyel popülasyon oranı bu nedenle

$$\frac{dn_{r+1,e}}{n_r} = \frac{U_{r+1}}{U_r} \frac{2 d^3p}{h^3} \exp\left[-\frac{\chi_r + p^2/(2m_e)}{kT}\right]. \quad (36)$$

Tüm momentumlar üzerinden integrasyon

$$\frac{n_{r+1}n_e}{n_r} = \frac{2U_{r+1}}{U_r} \exp\left(-\frac{\chi_r}{kT}\right) \frac{1}{h^3} \int \exp\left(-\frac{p^2}{2m_e kT}\right) d^3p. \quad (37)$$

sonucunu verir. Üç boyutlu Gauss integrali çarpanlarına ayrılır:

$$\int \exp\left(-\frac{p^2}{2m_e kT}\right) d^3p = \left[\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{p_x^2}{2m_e kT}\right) dp_x \right]^3 = (2\pi m_e kT)^{3/2}. \quad (38)$$

Bunun (37) içine konulması Saha iyonlaşma denklemini verir:

$$\frac{n_{r+1}n_e}{n_r} = \frac{2U_{r+1}(T)}{U_r(T)} \left(\frac{2\pi m_e kT}{h^2}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{\chi_r}{kT}\right). \quad (39)$$

Not 3. $2(2\pi m_e kT/h^2)^{3/2}$ çarpanı keyfî değildir. Spin dâhil, erişilebilir serbest-elektron kuantum durumlarının ısı yoğunluğudur. Üstel terim iyonlaşma enerjisini cezalandırırken, $T^{3/2}$ çarpanı süreklilik faz uzayı sıcaklıkla büyüdüğü için iyonlaşmayı destekler.

Aynı ifade elektron ısı de Broglie dalga boyu

$$\lambda_e = \frac{h}{(2\pi m_e kT)^{1/2}}, \quad (40)$$

ile yazılabilir; bu da

$$\frac{n_{r+1}n_e}{n_r} = \frac{2U_{r+1}}{U_r} \lambda_e^{-3} \exp\left(-\frac{\chi_r}{kT}\right). \quad (41)$$

sonucunu verir. Bu biçim Saha çarpanının kuantum kökenini özellikle açık hâle getirir. λ_e^3 niceliği, bir ısı elektron dalga paketinin kapladığı karakteristik hacimdir. Klasik, dejenere olmayan istatistikler

$$n_e \lambda_e^3 \ll 1. \quad (42)$$

koşulunu gerektirir. Sıradan yıldız fotosferlerinde bu koşul iyi sağlanır. Elektron dejenereliğinin kimyasal potansiyeli değiştirdiği ve basit Saha denkleminin Fermi-Dirac istatistiklerini içeren bir hâl denklemiyle değiştirilmesi gereken yoğun beyaz cüce iç bölgelerinde ise bozulur [7, 14].

Hidrojen için $U_p = 1$ ve $U_H \approx 2$ alınsın. Bu durumda $2U_p/U_H$ oranı yaklaşık bir olur; ancak açık elektron-spin çarpanını

$$\Phi_H(T) = 2 \left(\frac{2\pi m_e kT}{h^2} \right)^{3/2} \frac{U_p}{U_H} \exp\left(-\frac{\chi_H}{kT}\right). \quad (43)$$

biçiminde tutmak yaygındır. İyonlaşma dengesi

$$\frac{n_p n_e}{n_{H^0}} = \Phi_H(T), \quad (44)$$

şeklinde; burada $\chi_H = 13.598$ eV.

Hidrojen tek elektron vericisi ise ve $n_H = n_{H^0} + n_p$ ise, iyonlaşma kesrini

$$y = \frac{n_p}{n_H}. \quad (45)$$

olarak tanımlayalım. Sabit elektron basıncında

$$P_e = n_e kT, \quad (46)$$

olduğundan

$$\frac{y}{1-y} = \frac{n_p}{n_{H^0}} = \frac{\Phi_H(T)}{n_e} = \frac{kT \Phi_H(T)}{P_e}. \quad (47)$$

Böylece

$$y(T; P_e) = \frac{A(T; P_e)}{1 + A(T; P_e)}, \quad (48)$$

burada

$$A(T; P_e) = \frac{kT}{P_e} 2 \left(\frac{2\pi m_e kT}{h^2} \right)^{3/2} \frac{U_p}{U_H} \exp\left(-\frac{\chi_H}{kT}\right). \quad (49)$$

Balmer soğurmasıyla ilgili alt-düzye popülasyonu yaklaşık olarak

$$\frac{n_2}{n_H} = (1-y) \frac{g_2}{U_H} \exp\left(-\frac{10.199 \text{ eV}}{kT}\right). \quad (50)$$

şeklinde. Bu ifade Balmer maksimumunu sezgisel kılar: Boltzmann çarpanı T ile artarken, nötr kesir $1-y$ T ile azalır.

5. Işınımsal Aktarım Denklemleri

η_ν birim hacim, frekans, zaman ve katı açı başına yayım katsayısı; χ_ν ise birim uzunluk başına sönüm katsayısı olsun. Bir ışın koordinatı s boyunca, ds üzerindeki şiddet değişimi

$$dI_\nu = -\chi_\nu I_\nu ds + \eta_\nu ds. \quad (51)$$

olur. ds ile bölmek aktarım denklemini verir:

$$\frac{dI_\nu}{ds} = -\chi_\nu I_\nu + \eta_\nu. \quad (52)$$

Kaynak fonksiyonunu

$$S_\nu = \frac{\eta_\nu}{\chi_\nu}. \quad (53)$$

olarak tanımlayalım. O hâlde

$$\frac{dI_\nu}{ds} = -\chi_\nu (I_\nu - S_\nu). \quad (54)$$

Işın boyunca optik-derinlik artımı

$$d\tau_\nu = \chi_\nu ds. \quad (55)$$

şeklinde. τ_ν foton yayılma yönüne zıt yönde artıyorsa, dışa doğru aktarım denklemleri yaygın olarak

$$\mu \frac{dI_\nu}{d\tau_\nu} = I_\nu - S_\nu, \quad (56)$$

biçiminde yazılır; burada τ_ν içe doğru artan düşey optik derinliktir.

Yüzeyde dışa çıkan ışınım için biçimsel çözüm, (56) denklemleri $\exp(-\tau_\nu/\mu)$ integral çarpanı ile çarpılarak bulunur. $\mu > 0$ için

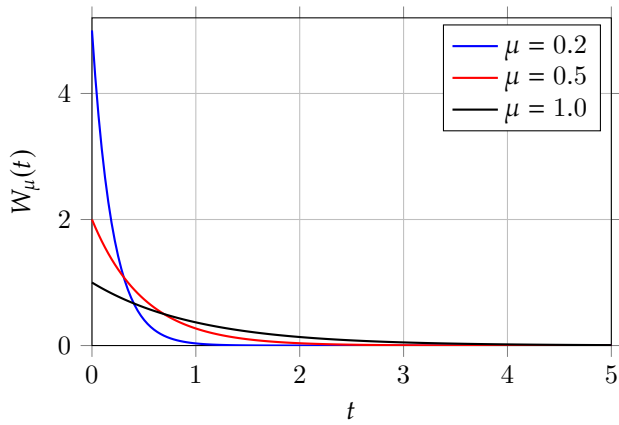
$$\frac{d}{d\tau_\nu} [I_\nu(\tau_\nu, \mu) e^{-\tau_\nu/\mu}] = -\frac{S_\nu(\tau_\nu)}{\mu} e^{-\tau_\nu/\mu}. \quad (57)$$

$\tau_\nu = 0$ ile ∞ arasında integre edip derin katkının sömümlendiğini varsayarsak

$$I_\nu(0, \mu) = \frac{1}{\mu} \int_0^\infty S_\nu(t) e^{-t/\mu} dt. \quad (58)$$

elde edilir. Daha genel olarak, τ_1 ve τ_2 optik derinlikleri arasında

$$I_\nu(\tau_1, \mu) = I_\nu(\tau_2, \mu) e^{-(\tau_2-\tau_1)/\mu} + \frac{1}{\mu} \int_{\tau_1}^{\tau_2} S_\nu(t) e^{-(t-\tau_1)/\mu} dt. \quad (59)$$



Şekil 2. Çıkan ışınlar için katkı çekirdekleri $W_\mu(t) = \mu^{-1} \exp(-t/\mu)$. Küçük μ değerli kenar ışınları şiddetlerinin çoğunu çok sık optik derinliklerden alırken, disk-merkezi ışınları daha derin katmanları örnekler.

Not 4. Denklem (58), μ açısındaki çıkan şiddetin kaynak fonksiyonunu $t \sim \mu$ optik-derinlik aralığında örneklediğini söyler. Kenara yakın, μ küçük olduğunda, gözlemci daha sık ve daha soğuk katmanları görür; kenar kararmasının kökeni budur.

(58) denklemindeki üstel, normalize bir katkı çekirdeği tanımlar:

$$W_\mu(t) = \frac{1}{\mu} e^{-t/\mu}, \quad (60)$$

çünkü

$$\int_0^\infty W_\mu(t) dt = 1. \quad (61)$$

Bu çekirdeğin birinci momenti

$$\int_0^\infty t W_\mu(t) dt = \mu. \quad (62)$$

olur. Dolayısıyla bir ışının en güçlü biçimde örneklediği optik derinlik tüm yönler için tam olarak birlik değil, μ mertebesinde. Kaynak fonksiyonu yerel olarak doğrusal ise,

$$S_\nu(t) = a_\nu + b_\nu t, \quad (63)$$

biçimsel çözüm

$$\begin{aligned} I_\nu(0, \mu) &= a_\nu + b_\nu \mu \\ &= S_\nu(\tau_\nu = \mu). \end{aligned} \quad (64)$$

sonucunu verir. Denklem (64) Eddington-Barbier bağıntısıdır. S_ν tam olarak doğrusal olduğunda ayrı bir yaklaşım değildir; aksine bu kaynak fonksiyonu için aktarım integralinin tam değerlendirilmesidir. Gerçek atmosferlerde süreklilik ışıınımı için mükemmel bir yerel pratik kuraldır.

Yerel termodinamik dengede, Kirchhoff yasası gerçek soğurma ve ısı yayım için

$$S_\nu = B_\nu(T) \quad (65)$$

verir. Eşvreli izotropik saçılma ile

$$S_\nu = (1 - \epsilon_\nu) J_\nu + \epsilon_\nu B_\nu, \quad (66)$$

olur; burada ϵ_ν foton yok edilme olasılığıdır. Aşağıda türetilen gri atmosfer, ışınsal dengede (65) denkleminin frekansla integre edilmiş biçimini varsayar.

6. Düzlem-Paralel Moment Denklemleri

Düzlem-paralel geometride tüm ortalama nicelikler yalnızca düşey optik derinliğe bağlıdır. z dışa doğru artsın ve τ_ν içe doğru artsın:

$$d\tau_\nu = -\chi_\nu dz. \quad (67)$$

$dz = \mu ds$ kullanıldığında aktarım denklemini

$$\mu \frac{\partial I_\nu}{\partial \tau_\nu} = I_\nu - S_\nu. \quad (68)$$

olur. (68) denklemini katı açı üzerinden integre edip $4\pi'$ 'ye bölerek sıfırıncı açılal momenti alalım:

$$\frac{1}{4\pi} \int \mu \frac{\partial I_\nu}{\partial \tau_\nu} d\Omega = \frac{1}{4\pi} \int (I_\nu - S_\nu) d\Omega. \quad (69)$$

S_ν izotropik ise

$$\frac{\partial H_\nu}{\partial \tau_\nu} = J_\nu - S_\nu. \quad (70)$$

elde edilir. Şimdi (68) denklemini μ ile çarpıp integre edelim ve $4\pi'$ 'ye bölelim:

$$\frac{1}{4\pi} \int \mu^2 \frac{\partial I_\nu}{\partial \tau_\nu} d\Omega = \frac{1}{4\pi} \int \mu (I_\nu - S_\nu) d\Omega. \quad (71)$$

$\int \mu d\Omega = 0$ olduğundan kaynak terimi yok olur ve

$$\frac{\partial K_\nu}{\partial \tau_\nu} = H_\nu. \quad (72)$$

bulunur.

Frekansla integre edilmiş gri aktarım için

$$J = \int_0^\infty J_\nu d\nu, \quad (73)$$

$$H = \int_0^\infty H_\nu d\nu, \quad (74)$$

$$K = \int_0^\infty K_\nu d\nu. \quad (75)$$

tanımlansın. Gri yaklaşım, optik derinliği tanımlamak için kullanılan opaklığın frekanstan bağımsız olduğunu varsayar:

$$\chi_\nu \rightarrow \chi. \quad (76)$$

Moment denklemleri

$$\frac{dH}{d\tau} = J - S, \quad (77)$$

$$\frac{dK}{d\tau} = H. \quad (78)$$

hâline gelir.

İşınsal denge, maddenin ışıınım yoluyla net enerji kazanmamasını ve kaybetmemesini gerektirir:

$$\int_0^\infty \chi_\nu (J_\nu - S_\nu) d\nu = 0. \quad (79)$$

Gri durumda bu

$$J = S. \quad (80)$$

biçimine indirgenir. Dolayısıyla (77)

$$\frac{dH}{d\tau} = 0, \quad (81)$$

verir; yani akı derinlikle sabittir. Toplam çıkan akı etkin sıcaklığı tanımlar:

$$F = 4\pi H = \sigma T_{\text{eff}}^4. \quad (82)$$

Böylece

$$H = \frac{\sigma T_{\text{eff}}^4}{4\pi}. \quad (83)$$

Aynı moment denklemleri optik olarak kalın sınırda difüzyon yaklaşımını verir. Şiddet neredeyse izotropik olduğunda, başat açısal bağımlılığı

$$I(\tau, \mu) = J(\tau) + 3\mu H(\tau). \quad (84)$$

olarak yazalım. Bu biçim, anizotropinin birinci mertebesine kadar J ve H momentlerini yeniden üretir. Yavaş değişen bir Planck kaynağını aktarım denkleminde koymak

$$H \approx \frac{1}{3} \frac{dB}{d\tau}. \quad (85)$$

sonucunu verir. $d\tau = -\kappa\rho dz$ ve $B = \sigma T^4/\pi$ olduğundan fiziksel akı

$$F = 4\pi H = -\frac{16\sigma T^3}{3\kappa\rho} \frac{dT}{dz}. \quad (86)$$

olur. $a = 4\sigma/c$ kullanıldığında bu eşdeğer olarak

$$F = -\frac{4acT^3}{3\kappa\rho} \frac{dT}{dz}. \quad (87)$$

şeklindedir. Eksi işareti, ışınsal enerjinin sıcaklık gradyanı boyunca aşağı yönde aktığını gösterir.

7. Eddington Yaklaşımı ve Gri Sıcaklık Yasası

Moment hiyerarşisi kapalı değildir; çünkü (78) hem K hem de H içerir. Eddington yaklaşımı

$$K = \frac{1}{3}J. \quad (88)$$

varsayımıyla hiyerarşiyi kapatır. Işınsal denge $J = S$ olduğundan ve LTE ısı yayımı

$$S = B = \frac{\sigma}{\pi} T^4, \quad (89)$$

olduğundan

$$K = \frac{1}{3} \frac{\sigma}{\pi} T^4. \quad (90)$$

elde ederiz. (78) denkleminde,

$$\frac{dK}{d\tau} = H = \frac{\sigma T_{\text{eff}}^4}{4\pi}. \quad (91)$$

İntegrasyon

$$K(\tau) = H\tau + C. \quad (92)$$

verir. İntegrasyon sabiti Eddington sınır koşuluyla belirlenir. Yüzeyde içeri gelen ışınsal olmadığı varsayılır:

$$I(0, \mu) = 0 \quad \text{for} \quad \mu < 0. \quad (93)$$

Dışa çıkan ışınsal, zayıf anizotropik biçimde

$$J(0) = 2H(0). \quad (94)$$

sağlanacak şekilde yaklaştırılır. $K(0) = J(0)/3$ kullanıldığında

$$K(0) = \frac{2}{3}H. \quad (95)$$

olur. Dolayısıyla

$$K(\tau) = H \left(\tau + \frac{2}{3} \right). \quad (96)$$

(90), (83) ve (96) birleştirildiğinde

$$\frac{1}{3} \frac{\sigma}{\pi} T^4 = \frac{\sigma T_{\text{eff}}^4}{4\pi} \left(\tau + \frac{2}{3} \right), \quad (97)$$

$$T^4(\tau) = \frac{3}{4} T_{\text{eff}}^4 \left(\tau + \frac{2}{3} \right). \quad (98)$$

elde edilir. Eşdeğer olarak,

$$\frac{T(\tau)}{T_{\text{eff}}} = \left[\frac{3}{4} \left(\tau + \frac{2}{3} \right) \right]^{1/4}. \quad (99)$$

Önerme 1 (Gri fotosfer). *Eddington gri atmosferinde, yerel sıcaklığı etkin sıcaklığa eşit olan katman optik derinlik*

$$\tau_{\text{ph}} = \frac{2}{3}. \quad (100)$$

değerindedir.

Kanıt. (98) denkleminde $T(\tau) = T_{\text{eff}}$ koyun. O zaman

$$1 = \frac{3}{4} \left(\tau + \frac{2}{3} \right), \quad (101)$$

dolayısıyla

$$\tau + \frac{2}{3} = \frac{4}{3}, \quad (102)$$

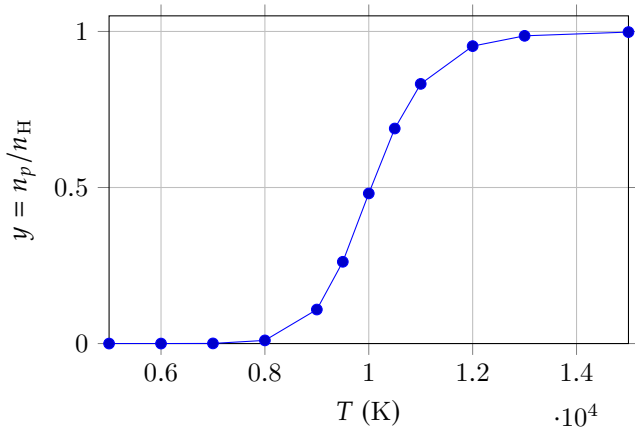
ve buradan $\tau = 2/3$ bulunur. $\square$

Bu nedenle fotosfer $\tau = 0$ yüzeyi değildir. Ortaya çıkan akıyı temsil eden fotonların kaçtığı derinliktir. Gri olmayan bir atmosferde optik derinlik frekansa bağımlıdır; dolayısıyla farklı dalga boylarının farklı fotosferleri vardır.

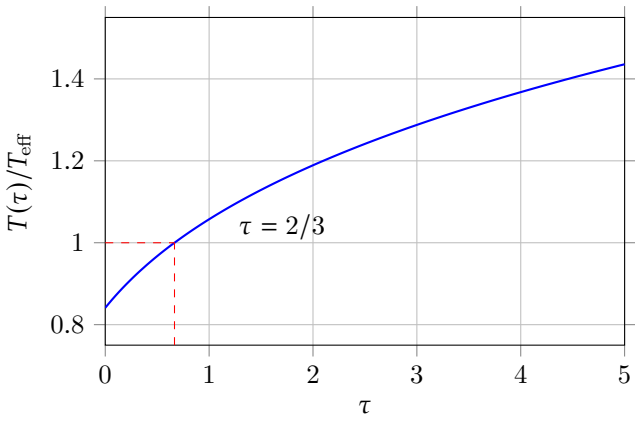
Eddington çarpanı çoğu kez

$$f(\tau) = \frac{K(\tau)}{J(\tau)}. \quad (103)$$

olarak yazılır. (88) kapanışı $f = 1/3$ varsayımıdır. Bununla birlikte tamamen dışa doğru bir demetin üst sınırında K/J bire yaklaşabilir; tam izotropik bir alanda ise tam olarak $1/3$ olur. Bu nedenle gri çözüm, fotonların tek taraflı kaçışını taklit etmeyi amaçlayan bir yüzey sınır koşulu ile derin, difüzyon-benzeri bir açısal kapanışı birleştirir. Bu hibrit nitelik, hem onun bir ölçekleme yasası olarak başarısını hem de sınırlı nicel doğruluğunu açıklar.



Şekil 3. Sabit elektron basıncı $P_e = 10^3 \text{ dyn cm}^{-2}$ için, $U_H \approx 2$ ve $U_p = 1$ ile Saha denklemlerinden hidrojen iyonlaşma kesri. Hızlı geçiş, χ_H/kT 'ye üstel duyarlılığı yansıtır.



Şekil 4. Eddington gri atmosferinin sıcaklık yapısı. Yerel sıcaklık $\tau = 2/3$ değerinde T_{eff} değerine eşittir; bu da klasik fotosferik optik derinliği gerekçelendirir.

8. Ortaya Çıkan Şiddet ve Kenar Kararması

Biçimsel çözüm (58), gri atmosferde analitik olarak değerlendirilebilir. $S = B = J$ ve $J = 3K$ olduğundan, (96) ve (80) denklemleri

$$S(\tau) = J(\tau) = 3H \left(\tau + \frac{2}{3} \right). \quad (104)$$

sonucunu verir. Bunun (58) içine konulması

$$I(0, \mu) = \frac{1}{\mu} \int_0^\infty 3H \left(t + \frac{2}{3} \right) e^{-t/\mu} dt. \quad (105)$$

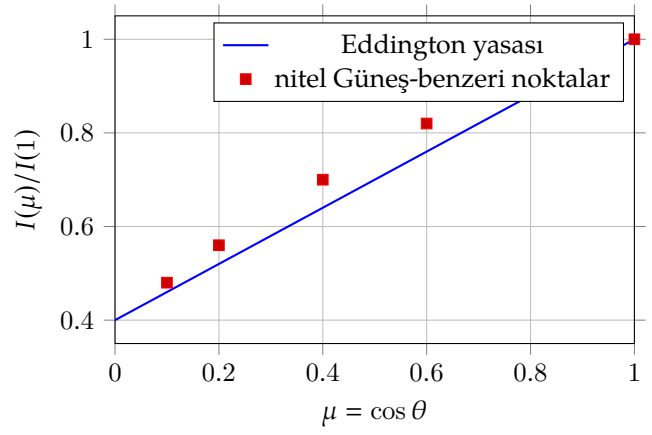
verir. Gerekli integraller

$$\int_0^\infty e^{-t/\mu} dt = \mu, \quad (106)$$

$$\int_0^\infty t e^{-t/\mu} dt = \mu^2. \quad (107)$$

şeklinde. Dolayısıyla

$$\begin{aligned} I(0, \mu) &= \frac{3H}{\mu} \left[\mu^2 + \frac{2}{3}\mu \right] \\ &= 3H \left(\mu + \frac{2}{3} \right). \end{aligned} \quad (108)$$



Şekil 5. Eddington kenar kararması yasası $I(\mu)/I(1) = (2 + 3\mu)/5$. Kırmızı noktalar, gerçek dalga boyuna bağımlı kenar kararmasının eğilim bakımından benzer olduğunu, ancak gri doğrusal yasa tarafından tam olarak betimlenmediğini gösteren açıklayıcı Güneş-benzeri değerlerdir.

Disk merkezinde $\mu = 1$ için

$$I(0, 1) = 3H \left(\frac{5}{3} \right) = 5H. \quad (109)$$

Böylece Eddington kenar kararması yasası

$$\frac{I(\mu)}{I(1)} = \frac{\mu + 2/3}{1 + 2/3} = \frac{2 + 3\mu}{5}. \quad (110)$$

olur.

Not 5. Denklem (110), μ cinsinden doğrusaldır. $I(0)/I(1) = 0.4$ öngörür; oysa Güneş kenar kararması dalga boyuna güçlü biçimde bağlıdır ve tam olarak doğrusal değildir. Nitel eğilim doğrudur: kenara yakın ışınlar daha küçük optik derinliklerden ve dolayısıyla daha soğuk katmanlardan kaçar.

Gözlenebilir akı, ortaya çıkan şiddetin dış yarıküre üzerinden integre edilmesiyle yeniden elde edilir:

$$F = 2\pi \int_0^1 I(0, \mu) \mu d\mu. \quad (111)$$

(108) kullanılarak

$$\begin{aligned} F &= 6\pi H \int_0^1 \left(\mu^2 + \frac{2}{3}\mu \right) d\mu \\ &= 6\pi H \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3} \right) = 4\pi H. \end{aligned} \quad (112)$$

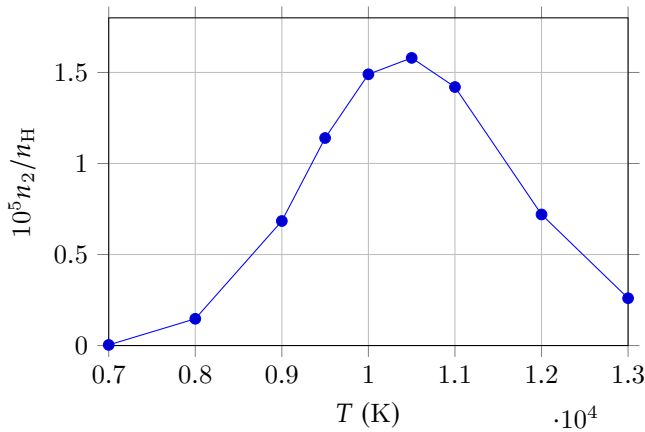
Dolayısıyla kenar kararması yasası, T_{eff} tanımında kullanılan akı normalizasyonu tutarlıdır. Bu denetim önemlidir: yıldız yarıçapı veya ötegezegen geçişi çalışmalarında kullanılan ampirik bir kenar kararması uyu-mu, yüzey parlaklığı yasası olarak yorumlanacaksa toplam akıyı korumalıdır.

9. Çözümlü Sayısal Uygulamalar

9.1. Sabit elektron basıncında hidrojen iyonlaşması

cgs birimlerini kullanalım. Şunlar alınsın:

$$m_e = 9.109 \times 10^{-28} \text{ g}, \quad (113)$$



Şekil 6. (50) denkleminde yaklaşık Balmer alt-düzey popülasyonu; Şekil 3 ile aynı sabit elektron basıncı için 10^5 ile ölçeklenmiştir. 10^4 K civarındaki maksimum, uyarılma ile iyonlaşma arasındaki rekabeti yansıtır ve A-tipi yıldızların güçlü Balmer çizgilerini açıklar.

$$k = 1.381 \times 10^{-16} \text{ erg K}^{-1}, \quad (114)$$

$$h = 6.626 \times 10^{-27} \text{ erg s}, \quad (115)$$

$$\chi_H = 13.598 \text{ eV} = 2.179 \times 10^{-11} \text{ erg}. \quad (116)$$

Elektron-durum çarpanı

$$2 \left(\frac{2\pi m_e k}{h^2} \right)^{3/2} = 4.83 \times 10^{15} \text{ cm}^{-3} \text{ K}^{-3/2}. \quad (117)$$

olur. $U_p/U_H = 1/2$ ile etkin hidrojen çarpanı yaklaşık olarak

$$\Phi_H(T) = 2.42 \times 10^{15} T^{3/2} \exp \left(-\frac{1.5789 \times 10^5}{T} \right) \text{ cm}^{-3}. \quad (118)$$

şeklinde. Bunun yerine açık ifade (43) korunursa, U_H için aynı konvansiyon tutarlı biçimde kullanılmalıdır. $P_e = 10^3 \text{ dyn cm}^{-2}$ değerinde

$$n_e = \frac{P_e}{kT} = 7.24 \times 10^{14} \left(\frac{10^4 \text{ K}}{T} \right) \text{ cm}^{-3}. \quad (119)$$

olur. $T = 10^4$ K için, Şekil 3 konvansiyonu kullanıldığında,

$$A = \frac{kT\Phi_H}{P_e} \approx 0.93, \quad (120)$$

$$y = \frac{0.93}{1 + 0.93} \approx 0.48. \quad (121)$$

Böylece hidrojen kabaca yarı iyonlaşmıştır. $T = 9000$ K için

$$y \approx 0.11, \quad (122)$$

iken, $T = 11000$ K için

$$y \approx 0.83. \quad (123)$$

olur. Geçiş, $\exp(-\chi/kT)$ üstel terimi nedeniyle dardır.

9.2. Balmer çizgisi şiddet maksimumu

$n = 2$ popülasyonu için Saha iyonlaşmasını Boltzmann uyarılmasıyla birleştiririz:

$$\frac{n_2}{n_H} = (1 - y) 4 \exp \left(-\frac{1.1837 \times 10^5}{T} \right). \quad (124)$$

$T = 9500$ K için Şekil 3 $y \approx 0.262$ verir; dolayısıyla

$$\begin{aligned} \frac{n_2}{n_H} &= 0.738 \times 4 \exp(-12.46) \\ &= 1.14 \times 10^{-5}. \end{aligned} \quad (125)$$

$T = 10500$ K için

$$\begin{aligned} \frac{n_2}{n_H} &= 0.311 \times 4 \exp(-11.27) \\ &= 1.58 \times 10^{-5}. \end{aligned} \quad (126)$$

Daha yüksek sıcaklıklarda iyonlaşma baskın gelir. Örneğin $T = 12000$ K için

$$\frac{n_2}{n_H} \approx 7.2 \times 10^{-6}. \quad (127)$$

Bu basitleştirilmiş sabit-basınç hesabında maksimum 10^4 K civarındadır; ayrıntılı yıldız atmosferleri gözlenen Balmer maksimumunu A0 tayf tipine, yaklaşık 9500 K değerine yakın yerleştirir; çünkü basınç, opaklık, çizgi genişlemesi ve derinliğe bağlı oluşum basit kestirimi değiştirir.

9.3. Gri atmosfer sıcaklıkları

Güneş için

$$T_{\text{eff},\odot} = 5772 \text{ K}. \quad (128)$$

alalım. Yüzeyde $\tau = 0$ için

$$\begin{aligned} T(0) &= T_{\text{eff}} \left(\frac{1}{2} \right)^{1/4} \\ &= 0.841 T_{\text{eff}} \approx 4850 \text{ K}. \end{aligned} \quad (129)$$

$\tau = 2/3$ değerinde

$$T = T_{\text{eff}} = 5772 \text{ K}. \quad (130)$$

olur. $\tau = 10$ için

$$\begin{aligned} T(10) &= 5772 \left[\frac{3}{4} \left(10 + \frac{2}{3} \right) \right]^{1/4} \text{ K} \\ &= 9.69 \times 10^3 \text{ K}. \end{aligned} \quad (131)$$

Gri model bu nedenle fotosferin altında dik bir artış öngörür; ancak konveksiyon, gri olmayan opaklık ve difüzyon fiziği önemli hâle geldiğinden sınırsız biçimde dışdeğerlenmemelidir.

9.4. Bir Güneş fotosferik basınç ölçeği

Optik-derinlik koordinatı hidrostatik dengeyle gaz basıncına bağlanabilir. İnce düzlem-paralel bir katmanda

$$\frac{dP}{dz} = -\rho g, \quad (132)$$

ve gri optik derinlik

$$d\tau = -\kappa\rho dz, \quad (133)$$

sağlar; burada κ kütle sönüm katsayısıdır. İki denklemin birleştirilmesi

$$\frac{dP}{d\tau} = \frac{g}{\kappa}. \quad (134)$$

verir. g ve κ fotosferik katman boyunca yaklaşık sabitse ve $P(0)$ ihmal edilirse,

$$P(\tau) \simeq \frac{g\tau}{\kappa}. \quad (135)$$

olur. Güneş örneği için

$$g_{\odot} = 2.74 \times 10^4 \text{ cm s}^{-2}, \quad (136)$$

$$\kappa = 0.20 \text{ cm}^2 \text{ g}^{-1}. \quad (137)$$

alalım. Gri fotosferde $\tau = 2/3$ için

$$P_{\text{ph}} \simeq 9.1 \times 10^4 \text{ dyn cm}^{-2}. \quad (138)$$

olur. Ortalama molekül ağırlığı $\mu_m = 1.3$ olan ideal gaz varsayılırsa,

$$\rho = \frac{\mu_m m_H P}{kT}. \quad (139)$$

$T = 5772 \text{ K}$ ile bu

$$\rho_{\text{ph}} \simeq 2.5 \times 10^{-7} \text{ g cm}^{-3}. \quad (140)$$

verir. Karşılık gelen foton ortalama serbest yolu

$$\ell = \frac{1}{\kappa\rho_{\text{ph}}} \simeq 2.0 \times 10^7 \text{ cm}, \quad (141)$$

yani yaklaşık 200 km 'dir. Bu sayı, fotosferik sıcaklık ve yoğunluğun değiştiği düşey ölçekle karşılaştırılabilir olup, yıldız yüzeyinin keskin değil genişlemiş olduğunu gösterir.

Gaz basıncı ölçek yüksekliği

$$H_P = \frac{kT}{\mu_m m_H g_{\odot}} \simeq 1.3 \times 10^7 \text{ cm}. \quad (142)$$

şeklinde. Bir mertebesindeki optik derinlikte $\ell \sim H_P$ karşılaştırması fotosferin yararlı bir fiziksel yorumunu verir: bir foton soğurulmadan veya saçılmadan önce makroskopik bir atmosfer ölçeği boyunca yol alır.

10. Genişletmeler ve Gözlemsel Sınamalar

Gri atmosfer, giderek daha gerçekçi modeller dizisinin ilk terimi olarak görülmelidir. En dolaysız genelleme tekrenkli aktarımdır. Her frekansta

$$d\tau_v = -\kappa_v \rho dz, \quad (143)$$

tanımlanır; böylece yaklaşık süreklilik oluşum derinliği

$$\tau_v \simeq \frac{2}{3}. \quad (144)$$

Tablo 1. $P_e = 10^3 \text{ dyn cm}^{-2}$ değerinde hidrojen için temsili sayısal değerler.

$T \text{ (K)}$	$y = n_p/n_H$	$10^5 n_2/n_H$
8000	0.010	0.147
9000	0.109	0.684
9500	0.262	1.14
10000	0.481	1.49
10500	0.689	1.58
11000	0.832	1.42
12000	0.953	0.72

koşulunu sağlar. κ_v dalga boyuyla güçlü biçimde değiştiğinden, (144) koşulu farklı frekanslarda farklı geometrik yükseklikler seçer. Örneğin bir bağlı-serbest kenar, morötesi fotosferi daha soğuk maddeye doğru yukarı taşıyarak çıkan akıda ani bir değişim üretebilir.

D uzaklığındaki çözilemeyen küresel bir yıldız için gözlenen tekrenkli akı yüzey akısıyla

$$f_v = \left(\frac{R}{D}\right)^2 F_v, \quad (145)$$

bağıntılıdır; burada R yıldız yarıçapıdır. Yüzey şiddeti μ 'nün fonksiyonu olarak biliniyorsa,

$$F_v = 2\pi \int_0^1 I_v(0, \mu) \mu d\mu. \quad (146)$$

olur. (145) ve (146) denklemleri, paralaks ile birleştirildiğinde açısal çap ölçümlerinin, tayfsal-fotometrik kalibrasyonun ve yıldız yarıçapı kestirimlerinin temelidir.

Yararlı bir gözlemsel yapı parlaklık sıcaklığı $T_b(\nu)$ olup

$$I_v = B_v(T_b). \quad (147)$$

ile örtük olarak tanımlanır. Planck fonksiyonunun T_b için çözülmesi

$$T_b(\nu) = \frac{h\nu}{k} \left[\ln \left(1 + \frac{2h\nu^3}{c^2 I_v} \right) \right]^{-1}. \quad (148)$$

verir. LTE süreklilik bölgelerinde Eddington-Barbier bağıntısı, $T_b(\nu, \mu)$ niceliğinin $\tau_v \simeq \mu$ düzeyindeki gaz sıcaklığını yaklaşık olarak ölçtüğünü ima eder. Bu nedenle Güneş'in merkezden kenara gözlemleri, bir model atmosferdeki düşey sıcaklık gradyanının doğrudan ampirik sınamasını sağlar.

Tayf çizgileri ek bir tanı katmanı sağlar. Bir çizgi yakınındaki toplam sönüm

$$\kappa_v = \kappa_c + \kappa_l \phi(\nu), \quad (149)$$

şeklinde yazılabilir; burada κ_c süreklilik opaklığı, κ_l integre çizgi opaklığı ve $\phi(\nu)$ normalize bir profildir:

$$\int_0^\infty \phi(\nu) d\nu = 1. \quad (150)$$

Bir soğurma çizgisinin eşdeğer genişliği

$$W_\lambda = \int \left(1 - \frac{F_\lambda}{F_{\lambda,c}} \right) d\lambda. \quad (151)$$

ile verilir. Zayıf çizgi sınırında eşdeğer genişlik, alt düzeydeki soğurucuların sütun yoğunluğu N_l ile orantılıdır:

$$W_\lambda \propto f_{lu} N_l, \quad (152)$$

burada f_{lu} osilatör şiddetidir. Alt-düzey sütun yoğunluğu bolluğa, iyonlaşma kesrine ve Boltzmann uyarılmasına bağlıdır. Bu nedenle bolluk analizi ışımsal aktarıma ek olarak yukarıda türetilen Saha-Boltzmann çarpanlarını gerektirir.

Kenar kararması günümüzde örtülmeli çift yıldızlar, optik girişimölçüm, mikromerceklenme kostik geçişleri ve ötegezegen geçişleriyle çok duyarlı biçimde sınanmaktadır. Yaygın bir ampirik yasa doğrusal biçimdir:

$$\frac{I(\mu)}{I(1)} = 1 - u_\lambda(1 - \mu), \quad (153)$$

burada u_λ dalga boyuna bağlıdır. Eddington yasası (110) bu gösterimde

$$u_\lambda = \frac{3}{5} \quad (154)$$

değerine karşılık gelir. Gerçek değerler dalga boyu, sıcaklık, kütleçekim ve metalliliğe göre değişir; (154) değerinden sapmaları gri olmayan opaklığın ve doğrusal olmayan kaynak fonksiyonlarının doğrudan kanıtıdır.

Atmosferik genişleme, basınç ölçek yüksekliği yıldız yarıçapıyla karşılaştırıldığında ihmal edilemez olmadığında önem kazanır. Küresel simetride aktarım denklemi bir açılal-adveksiyon terimi içerir:

$$\mu \frac{\partial I_\nu}{\partial r} + \frac{1 - \mu^2}{r} \frac{\partial I_\nu}{\partial \mu} = -\chi_\nu(I_\nu - S_\nu). \quad (155)$$

Yerel ölçek yüksekliği r' den çok küçük olduğunda eğrilik terimleri ihmal edilebilir ve düzlem-paralel denklem yeniden elde edilir. Genişlemiş devlerde, üstdevlerde, novalarda ve genişleyen rüzgârlarda küresel aktarım gereklidir.

Son olarak, LTE-dışı modelleme Saha-Boltzmann popülasyonlarını istatistiksel-denge denklemleriyle değiştirir. i düzeyi için

$$\sum_{j \neq i} n_j P_{ji} = n_i \sum_{j \neq i} P_{ij}, \quad (156)$$

burada P_{ij} ışımsal ve çarpışmalı hızları içerir. Bu denklemler aktarım denklemiyle bağlıdır; çünkü ışımsal hızlar ışıma alanına, opaklık ve yayım gücü ise düzey popülasyonlarına bağlıdır. Ayrıntılı denge tüm hızları yerel sıcaklıkta Boltzmann ve Saha oranlarını üretmeye zorladığında klasik LTE denklemleri yeniden elde edilir.

11. Tartışma

Yukarıdaki türetimler bir yaklaşım hiyerarşisine dayanır. Boltzmann ve Saha denklemleri, maddesel parçacıklar arasında termodinamik dengeyi ya da en azından yerel termodinamik dengeyi gerektirir. Çarpışmalar, Maxwellci elektron hızlarını ve yerel bir sıcaklıkla

karakterize edilen düzey popülasyonlarını kuracak kadar sık olmalıdır. Sıcak yıldızların seyrek üst atmosferlerinde, gezegenimsi bulutsularda, kromosferlerde ve süpernova atıklarında ışımsal hızlar çarpışmalı hızlara baskın gelebilir. Bu durumda düzey popülasyonları (23) ve (39) yerine istatistiksel-denge denklemlerinden bulunmalıdır [8, 15].

Bölüşüm fonksiyonu da dikkat gerektirir. Bağlı durumlar üzerinden saf bir hidrojen-benzeri toplam ıraksar; çünkü $g_n = 2n^2$ sınırsız büyürken düzey enerjileri sürekliliğe yaklaşır. Gerçek plazmalarda yüksek düzeyler elektrik mikroalanları, basınç iyonlaşması ve sonlu-yoğunluk etkileriyle çözünür. Bu nedenle pratik hâl denklemleri işgal olasılıkları veya açık kesmeler kullanılır. Basit Balmer örneği için $U_H \simeq 2$ yaklaşımı yeterlidir; çünkü ilgili sıcaklıklarda nötr bölüşüm fonksiyonuna temel durum baskındır.

Gri atmosfer frekanstan bağımsız opaklık varsayar. Gerçek yıldız opaklıkları güçlü biçimde gri değildir: bağlı-serbest kenarlar, serbest-serbest soğurma, H^- opaklığı, moleküler bantlar ve milyonlarca tayf çizgisi dalga boyuna bağımlı oluşum derinlikleri üretir. Güneş'in görünür sürekliliği büyük ölçüde H^- opaklığı tarafından biçimlendirilirken, metal çizgi örtmesi ve bağlı-serbest opaklık büyük olduğundan morötesi ışıma daha soğuk katmanlarda daha yüksekte oluşur. Sonuç olarak renk sıcaklığı, parlaklık sıcaklığı ve etkin sıcaklık arasındaki ilişki tek bir gri optik derinlikle yakalanamaz.

Eddington kapanışı $K = J/3$ yalnızca izotropik bir ışıma alanı için tamdır. Optik olarak kalın bir atmosferin derinlerinde bu, difüzyonla gerekçelendirilir: ışıma alanı neredeyse izotropiktir ve akıyı taşıyan küçük bir anizotropik düzeltme vardır. Yüzeye yakın alanda alan güçlü biçimde tek taraflı hâle gelir ve kapanış yaklaşık olur. $J(0) = 2H(0)$ sınır koşulu da benzer biçimde yaklaşıksaldır. Daha doğru gri çözümler Hopf fonksiyonu $q(\tau)$ tanımlar:

$$T^4(\tau) = \frac{3}{4} T_{\text{eff}}^4 [\tau + q(\tau)]. \quad (157)$$

Eddington çözümü için

$$q(\tau) = \frac{2}{3}. \quad (158)$$

Tam gri ışımsal-denge çözümleri derinliğe bağlı bir $q(\tau)$ verir; temsili değerler yaklaşık olarak

$$q(0) \simeq 0.577 \quad (159)$$

ile

$$q(\infty) \simeq 0.710. \quad (160)$$

arasında değişir. Eddington değeri 0.667 bu nedenle aktarım kuramının bir teoremi değil, yararlı bir ortalama-dır.

Gözlenen Güneş kenar kararması aynı noktayı gösterir. Eddington yasası (110), μ' ye basit doğrusal bağımlılık ve disk-merkezi şiddetinin 0.4 katı olan dalga boyundan bağımsız bir kenar şiddeti öngörür. Gerçek Güneş kenar kararması maviye daha güçlü, kırmızıda

daha zayıftır; polinom, logaritmik, karekök veya dört-parametrelili yasalarla daha iyi temsil edilir. Fiziksel neden gri türetimin yakaladığı nedendir: eğik ışınlar daha küçük optik derinliklerden kaçar ve sıcaklık dışa doğru azalır. Nicel yasa değişir; çünkü kaynak fonksiyonu optik derinlikte tam doğrusal değildir ve tekrenkli opaklık farklı yükseklikleri seçer.

Bu sınırlamalara rağmen analitik gri atmosfer vazgeçilmez olmaya devam eder. T_{eff} değerinin dış sınırla değil, neden bir mertebesindeki optik derinlikle ilişkilendirildiğini açıklar. Birçok yıldız-yapısı hesabı için dış sınır koşulunu sağlar [13]. Ayrıca yıldızların derin içlerinde kullanılan difüzyon yaklaşımını açıklığa kavuşturur. Optik olarak kalın sınırda, (9), (14) ve aktarım denkleminin birinci mertebe anizotropik düzeltmenin birleştirilmesi sıcaklık gradyanı boyunca aşağı yönde ki ışımsal akıyı verir:

$$F = -\frac{4acT^3}{3\kappa\rho} \frac{dT}{dz}, \quad (161)$$

burada $a = 4\sigma/c$ ışınsal sabiti ve $\kappa\rho = \chi$ olur. Bu ifade ışımsal enerji taşınımının yıldız-yapısı biçimidir.

Modern yıldız-atmosfer modelleri klasik kuramın her unsurunu genelleştirir. Birçok frekansta aktarımı çözer; saçılmayı, çizgi örtmesini, konveksiyonu, küresel genişlemeyi, rüzgârları, manyetik alanları ve LTE-dışı hız denklemlerini içerir. Bununla birlikte sayısal çıktıları burada türetilen aynı kavramlarla yorumlanır: şiddet momentleri, kaynak fonksiyonları, optik derinlik yüzeyleri, uyarılma ve iyonlaşma dengeleri ve ortaya çıkan ışınsal açısal yapısı.

12. Sonuç

Saha-Boltzmann denklemlerini ve Eddington gri atmosferini istatistiksel ve ışımsal temellerinden türettik. Boltzmann formülü, bağlı düzeylerin istatistik ağırlık ve uyarılma enerjisiyle kanonik ağırlıklandırılmasından doğar. Saha denklemi, iyonlaşmayı sürekliliğe uyarılma olarak ele alıp serbest-elektron faz-uzayı yoğunluğunu integre ederek elde edilir ve karakteristik $2(2\pi m_e kT/h^2)^{3/2}$ çarpanını üretir. Sabit elektron basıncında hidrojene uygulandığında, bu denklemler Balmer soğurmasının 10^4 K civarında en büyük olduğunu gösterir; çünkü $n = 2$ düzeyine uyarılma sıcaklıkla artarken nötr kesir azalır.

Aktarım denklemi, sönüm ile yayım arasındaki yerel rekabeti ifade eder. Biçimsel çözümü, ortaya çıkan ışınsal μ mertebesindeki optik derinlikleri örneklemediğini gösterir ve doğrudan süreklilik oluşumunun Eddington-Barbier yorumuna götürür. Düzlem-paralel gri atmosferde açısal momentleri almak ve ışımsal dengeli dayatmak sabit akı verir. Eddington kapanışı ve sınır koşuluyla

$$T^4 = \frac{3}{4} T_{\text{eff}}^4 (\tau + 2/3), \quad (162)$$

fotosferik koşul $\tau = 2/3$ ve kenar kararması yasası $I(\mu)/I(1) = (2 + 3\mu)/5$ elde edilir. Bu sonuçlar yaklaşıksaldır ancak fiziksel olarak saydamdır. Gri olmayan

opaklık, saçılma, LTE-dışı popülasyonlar, küresel genişleme ve gerçekçi yüzey sınır koşulları sayısal öngörülerini değiştirir; yine de analitik yapı yıldız-atmosfer kuramının temelini oluşturur.

A. Seçilmiş Sonuçlar İçin Ayrıntılı Cebir

Bu ek, kısa türetimlerde çoğu kez atlanan cebirsel adımları toplar.

İlk olarak, Saha denkleminde kullanılan Gauss integrali tek boyutlu bir integralin karesinden elde edilir. Şöyle tanımlayalım:

$$G(a) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} dx, \quad a > 0. \quad (163)$$

O hâlde

$$\begin{aligned} G^2(a) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a(x^2+y^2)} dx dy \\ &= 2\pi \int_0^{\infty} r e^{-ar^2} dr = \frac{\pi}{a}. \end{aligned} \quad (164)$$

Dolayısıyla

$$G(a) = \left(\frac{\pi}{a}\right)^{1/2}. \quad (165)$$

$$a = \frac{1}{2m_e kT}, \quad (166)$$

ile üç boyutlu integral

$$G^3(a) = (2\pi m_e kT)^{3/2}. \quad (167)$$

olur.

İkinci olarak, Eddington yüzey sınır koşulu basit bir yarıküre yaklaşımıyla gereğcelendirilebilir. Yüzeyde ortaya çıkan şiddetin dış yarıküre üzerinde sabit ve iç yarıküre üzerinde sıfır olduğunu varsayalım:

$$I(0, \mu) = \begin{cases} I_0, & 0 < \mu \leq 1, \\ 0, & -1 \leq \mu < 0. \end{cases} \quad (168)$$

O zaman

$$J(0) = \frac{1}{2} \int_0^1 I_0 d\mu = \frac{I_0}{2}, \quad (169)$$

$$H(0) = \frac{1}{2} \int_0^1 \mu I_0 d\mu = \frac{I_0}{4}. \quad (170)$$

Dolayısıyla

$$J(0) = 2H(0). \quad (171)$$

Sabit dışa çıkan şiddet varsayımı kabadır; ancak ortaya çıkan bağlantı, yüzey alanının izotropik olmaktan çok yaklaşık yarıküresel olduğu gerçeğini yakalar.

Üçüncü olarak, gri kenar kararması yasasının akı korunumu doğrudan normalizasyonundan çıkar.

$$I(\mu) = I(1) \frac{2 + 3\mu}{5}, \quad (172)$$

ile akı

$$\begin{aligned} F &= 2\pi I(1) \int_0^1 \frac{2+3\mu}{5} \mu d\mu \\ &= \frac{2\pi I(1)}{5} \left[\int_0^1 2\mu d\mu + \int_0^1 3\mu^2 d\mu \right] \\ &= \frac{2\pi I(1)}{5} (1+1) = \frac{4\pi I(1)}{5}. \end{aligned} \quad (173)$$

(109) $I(1) = 5H$ olduğundan bu

$$F = 4\pi H, \quad (174)$$

olur; H tanımının gerektirdiği gibi.

Son olarak, gri sıcaklık yasası sütun-kütle biçiminde yazılabilir. z yüksekliğinin üzerindeki sütun kütlesini

$$m(z) = \int_z^\infty \rho(z') dz'. \quad (175)$$

ile tanımlayalım. Sabit gri opaklık için

$$\tau = \kappa m. \quad (176)$$

olur. Bunun (98) içine konulması

$$T^4(m) = \frac{3}{4} T_{\text{eff}}^4 \left(\kappa m + \frac{2}{3} \right). \quad (177)$$

verir. Bu biçim, sabit kütleçekimle hidrostatik dengenin

$$P = g m. \quad (178)$$

verdiği yıldız-zarfı integrasyonlarında yararlıdır. (176) ve (178) denklemlerinin birleştirilmesi

$$P = \frac{g\tau}{\kappa}, \quad (179)$$

sonucunu, sayısal fotosfer örneğinde kullanılan basınç-optik-derinlik bağıntısını, yeniden verir.

Kaynaklar

- [1] G. Kirchhoff, "Ueber das Verhältniss zwischen dem Emissionsvermögen und dem Absorptionsvermögen der Körper für Wärme und Licht," *Annalen der Physik*, vol. 109, pp. 275–301, 1860.
- [2] M. Planck, "Ueber das Gesetz der Energieverteilung im Normalspectrum," *Annalen der Physik*, vol. 309, pp. 553–563, 1901.
- [3] A. Einstein, "Zur Quantentheorie der Strahlung," *Physikalische Zeitschrift*, vol. 18, pp. 121–128, 1917.
- [4] M. N. Saha, "Ionization in the Solar Chromosphere," *Philosophical Magazine*, vol. 40, pp. 472–488, 1920.
- [5] E. A. Milne, "Radiative Equilibrium in the Outer Layers of a Star," *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, vol. 81, pp. 361–375, 1921.

- [6] A. S. Eddington, *The Internal Constitution of the Stars*. Cambridge University Press, Cambridge, 1926.
- [7] S. Chandrasekhar, *Radiative Transfer*. Dover, New York, 1960.
- [8] D. Mihalas, *Stellar Atmospheres*, 2. baskı. W. H. Freeman, San Francisco, 1978.
- [9] G. B. Rybicki and A. P. Lightman, *Radiative Processes in Astrophysics*. Wiley, New York, 1979.
- [10] R. J. Rutten, *Radiative Transfer in Stellar Atmospheres*. Utrecht University ders notları, 2003.
- [11] D. F. Gray, *The Observation and Analysis of Stellar Photospheres*, 3. baskı. Cambridge University Press, Cambridge, 2005.
- [12] B. W. Carroll and D. A. Ostlie, *An Introduction to Modern Astrophysics*, 2. baskı. Cambridge University Press, Cambridge, 2017.
- [13] R. Kippenhahn, A. Weigert, and A. Weiss, *Stellar Structure and Evolution*, 2. baskı. Springer, Berlin, 2012.
- [14] S. L. Shapiro and S. A. Teukolsky, *Black Holes, White Dwarfs, and Neutron Stars*. Wiley, New York, 1983.
- [15] I. Hubeny and D. Mihalas, *Theory of Stellar Atmospheres*. Princeton University Press, Princeton, 2014.