



YILDIZ İÇ YAPISI

Hidrostatik Denge, Virial Teoremi ve Politropik Yıldız Modelleri ($n = 1,5$ ve $n = 3$)

Akademik Araştırma Makalesi

Teorik Astrofizik — Adım Adım Analitik Türetimler, Vektör Diyagramları ve Sayısal Tablolar

Hidrostatik Denge, Virial Teoremi ve Politropik Yıldız Modelleri ($n = 1,5$ ve $n = 3$)

Yıldız İç Yapısı

Eylül 2026

Özet. Hidrostatik yıldız yapısı, astrofizikteki en basit gayritrivial sınır-değer problemidir: kütleçekim özkütleçekimli bir gazı çöktürmeye çalışırken, basınç gradyanları onu destekler. Bu makale, Newtoncu kuramı yerel momentum korunumundan hidrostatik ve kütle-sürekliliği denklemlerine kadar geliştirir, merkezî basınç kestirimlerini türetir ve gazdan oluşan bir yıldız için uygun biçimiyle skaler virial teoremini kanıtlar. Ardından virial teoremi, Kelvin-Helmholtz zamanını ve karakteristik Güneş sıcaklığını kestirmek için kullanılır. Daha sonra politropik hal denklemleri, $P = K\rho^{1+1/n}$, tanıtılır ve Lane-Emden denklemini eksiksiz bir boyutsuzlaştırma ile türetilir. $n = 0, 1, 5$ için analitik çözümleri, merkezî seri çözümü, küresel integral özdeşlikleri ve astrofiziksel bakımdan önemli $n = 1.5$ ve $n = 3$ durumları için sayısal sabitler sunulur. Sabit K için kütlelerin yarıçaptan bağımsız olduğu istisnai $n = 3$ durumu vurgulanarak kütle-yarıçap bağıntısı türetilir. Uygulamalar, tamamen konvektif yıldızları, rölativistik olmayan ve rölativistik beyaz cüceleri ve Eddington standart modelini içerir. İnceleme, her matematiksel sonucun fiziksel içeriğini ve klasik kuramın hangi varsayımlar altında başarılı olduğu ya da başarısızlığa uğradığını vurgular.

Anahtar Kelimeler: yıldız iç yapıları; hidrostatik denge; virial teoremi; Lane-Emden denklemini; politropik; beyaz cüceler

1. Giriş

Yıldız iç yapıları kuramı, aldatıcı biçimde basit bir gözlemle başlar: normal bir yıldız uzun ömürlüdür, çünkü ortalama olarak her kütle elemanı neredeyse durgundur. Kütleçekim, yersel ölçeklerde muazzamdır; buna karşın Güneş türü bir yıldız ne dinamik zamanı içinde çöker ne de uzaya serbestçe genişler. İç basıncı, her küresel kabuk üzerindeki net kuvvet neredeyse sıfır olana kadar ayarlanır. Bu mekanik dengeye hidrostatik denge denir. Kütlelerin korunumu, bir hal denklemini ve enerji taşınımı ile üretimine ilişkin denklemlerle birlikte, yıldız yapısı kuramının belkemiğini oluşturur [3, 4, 5, 11, 12].

Tarihsel olarak, hidrostatik denge ve virial teoremi on dokuzuncu yüzyılda Güneş'i anlama girişimlerinin merkezinde zaten yer alıyordu. Kelvin ve Helmholtz, Güneş ışınrlığının kütleçekimsel büzülme ile sağlanabileceğini öne sürdüler. Enerji sorununu nihayetinde nükleer füzyon çözmüş olsa da, Kelvin-Helmholtz argümanı temel önemini korur: bir yıldızın doğal kütleçekimsel enerji ölçeğini ortaya koyar ve anakol öncesi yıldızların hidrojen tutuşmasından önce neden parladığını açıklar. Virial teoremi ise özkütleçekimli ideal bir gazın negatif ısı kapasitesine sahip olduğu yönündeki dikkat çekici sonucu verir: enerji kaybetmek onu daha sıcak hâle getirir. Sezgiye aykırı bu olgu, yıldız oluşumunun, yıldız büzülmesinin ve yıldız sistemlerinde çekirdek çökmesinin temelinde yatar [8].

Hidrostatik modellerin özellikle saydam bir sınıfı politropikler tarafından sağlanır,

$$P = K\rho^{1+1/n}, \quad (1)$$

burada K ve n sabitlerdir. Politropik modeller yalnızca matematiksel oyuncaklar değildir. Gaz konvektif ve neredeyse adyabatik olduğunda, beyaz cücelerde dejenasyon basıncı baskın olduğunda ve ışıyım basıncı ile

homolog yapı Eddington standart modeline yol açtığında ortaya çıkarlar. İlgili Lane-Emden denklemini, Lane ve Emden'in klasik çalışmalarında tanıtılmıştır [1, 2] ve astrofizikte kanonik doğrusal olmayan sınır-değer problemlerinden biri olmayı sürdürür.

Bu makalenin amacı, bu fikirlerin eksiksiz bir türetimini ileri düzey lisans öğrencileri, lisansüstü öğrenciler ve özlü fakat sağlam bir başvuru kaynağı isteyen araştırmacılar için uygun bir düzeyde sunmaktır. Sürekli ortam momentum korunumundan başlıyor, hidrostatik dengeyi ve kütle sürekliliğini türetiyor, merkezî basınçları kestiriyor ve ardından virial teoremini doğrudan hidrostatik denklemden kanıtlıyoruz. Daha sonra analitik çözümler, merkezî açılımlar, sayısal sabitler ve kütle-yarıçap ölçeklenmeleri dâhil olmak üzere Lane-Emden formalizmini geliştiriyoruz. $n = 1.5$ ve $n = 3$ durumlarına özel önem verilir; çünkü bunlar sırasıyla tamamen konvektif yıldızlara ve rölativistik olmayan dejenere nesnelere, ayrıca ışıyım baskın ya da rölativistik olarak dejenere konfigürasyonlara karşılık gelir.

2. Fiziksel ve Matematiksel Çerçeve

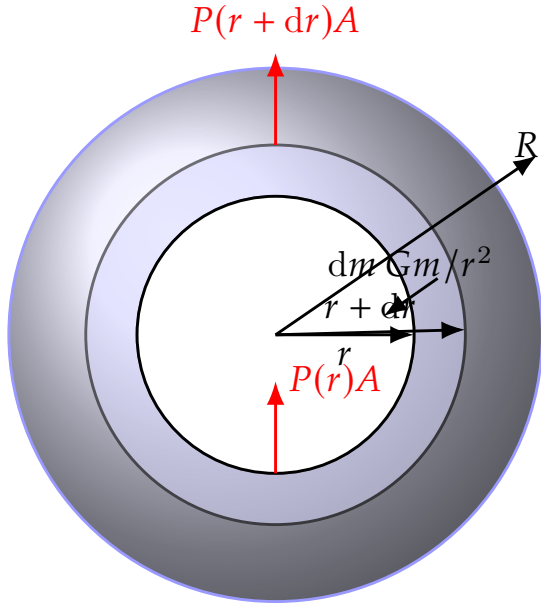
Küresel simetri altında, yalıtılmış, dönmeyen, manyetik olmayan, Newtoncu bir yıldız ele alıyoruz. Bağımsız yarıçap r , yoğunluk $\rho(r)$, basınç $P(r)$ ve r içine kalan kütle $m(r)$ olsun. Kütleçekim potansiyeli Φ Poisson denklemini sağlar,

$$\nabla^2\Phi = 4\pi G\rho. \quad (2)$$

Küresel simetride kütleçekim ivmesi

$$g(r) = -\frac{d\Phi}{dr} = -\frac{Gm(r)}{r^2}. \quad (3)$$

biçimindedir. İşaret kuralı, r dışarı doğru artarken kütleçekimin içeri doğru yöneldiği şeklindedir.



alanı A ve kalınlığı dr olan ince kabuk

Şekil 1. İnce bir küresel kütle kabuğu için serbest cisim diyagramı. İç yüzdeki dış doğru basınç kuvveti, dış yüzdeki içe doğru basınç kuvvetini $-dP A$ kadar aşar ve bu fark hidrostatik dengede kabuğun ağırlığını dengeler.

Tanım 1 (Hidrostatik yıldız modeli). Hidrostatik yıldız modeli, akışkan hızının sıfırlandığı, $v = 0$, ve basınç gradyanlarının özkütleçekimi tam olarak dengelediği zamandan bağımsız küresel bir çözümdür.

Yüzey yarıçapı R şu şekilde tanımlanır:

$$P(R) = 0, \quad m(R) = M, \quad (4)$$

burada M toplam kütledir. Ortalama yoğunluk

$$\bar{\rho} = \frac{3M}{4\pi R^3}. \quad (5)$$

biçimindedir. Düzenli bir merkez için,

$$m(0) = 0, \quad \frac{dP}{dr}(0) = 0, \quad \rho(0) = \rho_c < \infty. \quad (6)$$

3. Momentum Korunumundan Hidrostatik Denge

Viskoz olmayan özkütleçekimli bir akışkan için Euler denklemi yerel momentum dengesidir:

$$\rho \frac{dv}{dt} = -\nabla P - \rho \nabla \Phi, \quad (7)$$

burada maddesel türev

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla. \quad (8)$$

biçimindedir. Statik bir yıldız için $v = 0$ ve $\partial/\partial t = 0$ olduğundan (7) denklemi

$$\nabla P = -\rho \nabla \Phi. \quad (9)$$

hâline gelir. Radyal bileşeni alıp (3) kullanıldığında

$$\frac{dP}{dr} = -\rho \frac{d\Phi}{dr} = -\frac{Gm(r)\rho(r)}{r^2}. \quad (10)$$

elde edilir. Bu, hidrostatik denge denklemdir.

Aynı sonuç Şekil 1'deki kabuk kuvvet dengesinden de elde edilir. Kalınlığı dr ve alanı A olan bir kabuğun kütlesi

$$dm = \rho A dr. \quad (11)$$

olur. Net dış doğru basınç kuvveti

$$F_P = P(r)A - P(r + dr)A. \quad (12)$$

şeklinde. Birinci mertebeye kadar açılırsa,

$$P(r + dr) = P(r) + \frac{dP}{dr} dr, \quad (13)$$

dolayısıyla

$$F_P = -A \frac{dP}{dr} dr. \quad (14)$$

İçe doğru kütleçekim kuvveti

$$F_g = -\frac{Gm(r)\rho A dr}{r^2}. \quad (15)$$

biçimindedir. Statik denge $F_P + F_g = 0$,

$$-A \frac{dP}{dr} dr - \frac{Gm\rho A dr}{r^2} = 0, \quad (16)$$

sonucunu verir ve buradan yine (10) elde edilir.

Kütle sürekliliği denklemi, $m(r)$ tanımından çıkar. İnce bir kabuktaki kütle

$$dm = 4\pi r^2 \rho(r) dr, \quad (17)$$

olduğundan

$$\frac{dm}{dr} = 4\pi r^2 \rho. \quad (18)$$

elde edilir. (10) ve (18) denklemleri, bir hal denklemi $P(\rho, \dots)$ belirtildiğinde kapalı bir mekanik sistem oluşturur.

Not 1. (10) denklemi, basıncın dışarı doğru azalması gerektiğini söyler. $m > 0$ ve $\rho > 0$ olduğundan, $0 < r < R$ için $dP/dr < 0$ olur. Böylece en büyük basınç merkezde gerçekleşir.

(10) ve (18) birleştirildiğinde P ya da ρ için ikinci mertebeden bir denklem elde edilir. (10)'den,

$$\frac{r^2}{\rho} \frac{dP}{dr} = -Gm. \quad (19)$$

Türev alınıp (18) yerine konursa,

$$\frac{d}{dr} \left(\frac{r^2}{\rho} \frac{dP}{dr} \right) = -4\pi G r^2 \rho. \quad (20)$$

Bu, $\nabla \cdot (\rho^{-1} \nabla P) = -4\pi G \rho$ denkleminin küresel biçimidir.

4. Merkezî Basınç Kestirimleri ve Sınırları

Merkezî basınç için yararlı bir ölçek doğrudan boyut analizinden gelir. Hidrostatik denge

$$\frac{P_c}{R} \sim \frac{GM\rho}{R^2}. \quad (21)$$

verir. $\rho \sim M/R^3$ ile,

$$P_c \sim \frac{GM^2}{R^4}. \quad (22)$$

Güneş için bu ölçek

$$\begin{aligned} \frac{GM_\odot^2}{R_\odot^4} &= \frac{(6.6743 \times 10^{-11})(1.9885 \times 10^{30})^2}{(6.957 \times 10^8)^4} \\ &= 1.13 \times 10^{15} \text{ Pa}. \end{aligned} \quad (23)$$

Gerçek Güneş merkezî basıncı yaklaşık 2.5×10^{16} Pa olup, Güneş merkezî olarak yoğunlaşmış olduğundan yaklaşık 20 mertebesinde bir çarpan kadar daha büyüktür.

Tam olarak düzgün yoğunluklu bir küre için,

$$\rho = \rho_0 = \frac{3M}{4\pi R^3}, \quad (24)$$

ve

$$m(r) = \frac{4\pi}{3} \rho_0 r^3. \quad (25)$$

Hidrostatik denge

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{4\pi}{3} G \rho_0^2 r. \quad (26)$$

hâline gelir. $P(R) = 0$ olan yüzeyden r' 'ye kadar integre edilirse,

$$\begin{aligned} P(r) &= \int_r^R \frac{4\pi}{3} G \rho_0^2 r' dr' \\ &= \frac{2\pi}{3} G \rho_0^2 (R^2 - r^2). \end{aligned} \quad (27)$$

Dolayısıyla merkezî basınç

$$P_c = \frac{2\pi}{3} G \rho_0^2 R^2. \quad (28)$$

olur. (24)'nin yerine konması

$$P_c = \frac{3}{8\pi} \frac{GM^2}{R^4}. \quad (29)$$

sonucunu verir.

Önerme 1 (Merkezî basınç alt kestirimi). *Kütlesi M ve yarıçapı R olan özkütleçekimli bir yıldız için asgari merkezî basınç ölçeği, düzgün yoğunluk değerinin mertebesinde:*

$$P_c \gtrsim \frac{3}{8\pi} \frac{GM^2}{R^4}. \quad (30)$$

Fiziksel neden basittir: eğer kütle düzgün bir küreye göre daha merkezî yoğunlaşmışsa, üstteki basıncın desteklenmesi gereken iç yıldız bölgelerinde kütleçekim ivmesi daha büyüktür. Bu nedenle merkezî yoğunlaşma,

P_c değerini düzgün modelin üzerine çıkarır. (30) denklemi, keyfî patolojik yoğunluk dağılımları için kesin bir teoremden ziyade sağlam bir astrofiziksel alt kestirim olarak anlaşılmalıdır.

Güneş için (29),

$$P_{c,\odot}^{\min} = \frac{3}{8\pi} \frac{GM_\odot^2}{R_\odot^4} = 1.35 \times 10^{14} \text{ Pa}. \quad (31)$$

sonucunu verir. Bu değer atmosfer basıncını dokuz mertebe aşar ve yıldız içlerinin doğaları gereği yüksek basınçlı ortamlar olduğunu gösterir.

5. Virial Teoremi

Virial teoremi, iç ısı enerjisi kütleçekimsel bağlanma enerjisine bağlar. Hidrostatik dengeden başlayalım:

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{Gm\rho}{r^2}. \quad (32)$$

$4\pi r^3 dr$ ile çarpalım:

$$4\pi r^3 \frac{dP}{dr} dr = -\frac{Gm}{r} 4\pi r^2 \rho dr. \quad (33)$$

$dm = 4\pi r^2 \rho dr$ kullanılırsa,

$$4\pi r^3 \frac{dP}{dr} dr = -\frac{Gm}{r} dm. \quad (34)$$

Merkezden yüzeye kadar integre edilirse,

$$\int_0^R 4\pi r^3 \frac{dP}{dr} dr = - \int_0^M \frac{Gm}{r} dm. \quad (35)$$

Sağ taraf kütleçekimsel potansiyel enerjidir,

$$\Omega = - \int_0^M \frac{Gm}{r} dm. \quad (36)$$

Sol tarafı kısmi integrasyonla integre edelim:

$$\int_0^R 4\pi r^3 \frac{dP}{dr} dr = [4\pi r^3 P]_0^R - \int_0^R 12\pi r^2 P dr. \quad (37)$$

$r = 0$ 'da $r^3 P \rightarrow 0$ ve $P(R) = 0$ olduğundan,

$$[4\pi r^3 P]_0^R = 0. \quad (38)$$

Bu nedenle

$$-3 \int_0^R 4\pi r^2 P dr = \Omega. \quad (39)$$

Eşdeğer olarak,

$$3 \int P dV + \Omega = 0. \quad (40)$$

Tek atomlu ideal gaz için,

$$P = \frac{\rho k T}{\mu m_H}, \quad (41)$$

ve ısı kinetik enerji yoğunluğu

$$u = \frac{3}{2}P. \quad (42)$$

olur. Toplam ısı enerjisi

$$K = \int u dV = \frac{3}{2} \int P dV. \quad (43)$$

biçimindedir. (40) içine yerine koyma

$$2K + \Omega = 0. \quad (44)$$

sonucunu verir. Böylece

$$K = -\frac{\Omega}{2}, \quad E = K + \Omega = \frac{\Omega}{2} = -K. \quad (45)$$

Not 2. Bağlı bir ideal-gaz yıldızının toplam enerjisi E negatiftir. Yıldız enerji ısıtıldığında, E daha negatif hâle gelir; dolayısıyla $K = -E$ artar. Özkütleçekimli ideal bir gaz enerji kaybettiğinde ısınır.

Kütleçekimsel enerji

$$\Omega = -\alpha \frac{GM^2}{R}, \quad (46)$$

şeklinde yazılabilir; burada α yoğunluk profiline bağlıdır. Düzgün bir küre için,

$$\alpha = \frac{3}{5}. \quad (47)$$

Birçok yıldız modelinde α birlik mertebesinde.

6. Kelvin–Helmholtz Zamanı ve Ortalama Güneş Sıcaklığı

Işınırılığı L olan bir yıldız yavaşça kütleçekimsel enerji kaybederek ısıma yapıyorsa, karakteristik Kelvin–Helmholtz zamanı

$$t_{KH} \sim \frac{|E|}{L} \sim \frac{GM^2}{RL}. \quad (48)$$

olur. Daha kesin olarak, (45) kullanıldığında,

$$|E| = \frac{|\Omega|}{2} = \frac{\alpha}{2} \frac{GM^2}{R}. \quad (49)$$

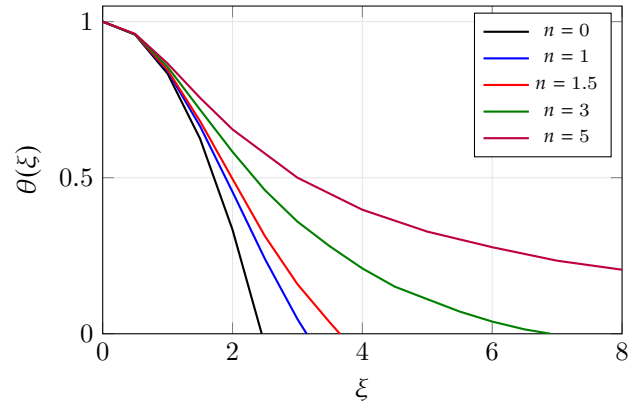
Böylece

$$t_{KH} = \frac{\alpha GM^2}{2RL}. \quad (50)$$

Güneş için, $\alpha/2$ çarpanı olmadan geleneksel birlik mertebesi kestirimi alınır,

$$\begin{aligned} t_{KH,\odot} &\sim \frac{GM_{\odot}^2}{R_{\odot}L_{\odot}} \\ &= \frac{(6.6743 \times 10^{-11})(1.9885 \times 10^{30})^2}{(6.957 \times 10^8)(3.828 \times 10^{26})} \\ &= 9.91 \times 10^{14} \text{ s} = 3.14 \times 10^7 \text{ yr}. \end{aligned} \quad (51)$$

Bu, Güneş'in jeolojik ve nükleer yaşından çok daha kısadır; dolayısıyla kütleçekimsel büzülmenin bugünkü



Şekil 2. $n = 0, 1, 1.5, 3, 5$ için Lane–Emden fonksiyonları. $n = 0, 1, 5$ durumları analitiktir; $n = 1.5$ ve $n = 3$ sayısalıdır. $n = 5$ modeli yalnızca $\xi \rightarrow \infty$ iken sifıra yaklaşır ve sonsuz yarıçapa fakat sonlu kütleyle sahiptir.

anakol Güneş'ini 4.6×10^9 yr boyunca besleyemeyeceğini kanıtlar.

Virial teoremi ortalama Güneş sıcaklığını da kestirir. Yıldızın

$$N = \frac{M}{\mu m_H} \quad (52)$$

parçacık içerdiğini varsayalım; burada μ ortalama molekül ağırlığıdır. Kütle-ağırlıklı ortalama sıcaklık $\bar{T}$ şu şekilde tanımlansın:

$$K = \frac{3}{2} N k \bar{T}. \quad (53)$$

$2K = |\Omega|$ kullanılarak,

$$3Nk\bar{T} = \alpha \frac{GM^2}{R}. \quad (54)$$

Dolayısıyla

$$\bar{T} = \frac{\alpha}{3} \frac{GM\mu m_H}{kR}. \quad (55)$$

Güneş için, $\mu \approx 0.61$ ile,

$$\begin{aligned} \frac{GM_{\odot}\mu m_H}{kR_{\odot}} &= \frac{(6.6743 \times 10^{-11})(1.9885 \times 10^{30})(0.61)(1.6735 \times 10^{-27})}{(1.3807 \times 10^{-23})(6.957 \times 10^8)} \\ &= 1.41 \times 10^7 \text{ K}. \end{aligned} \quad (56)$$

Böylece

$$\bar{T}_{\odot} \approx 4.7 \times 10^6 \alpha \text{ K}. \quad (57)$$

$\alpha \approx 1$ için bu birkaç milyon kelvindir; gerçek Güneş merkezî sıcaklığı ise $T_c \approx 1.57 \times 10^7$ K değerindedir. Fark, merkezî yoğunlaşmayı ve ortalama ile merkezî sıcaklıklar arasındaki ayrımı yansıtır.

7. Politropik Hal Denklemleri

Tanım 2 (Politropik hal denklemi). Politropik bir gaz

$$P = K\rho^\gamma, \quad \gamma = 1 + \frac{1}{n}, \quad (58)$$

bağıntısını sağlar; burada K politropik sabit ve n politropik indekstir.

İndeks n sıkıştırılabilirliği ölçer. Daha küçük n , basınç ile yoğunluk arasında daha katı bir bağıntı verir. Önemli durumlar şunları içerir:

$$n = 0, \quad \rho = \text{constant}, \quad (59)$$

$$n = 1.5, \quad \gamma = 5/3, \quad (60)$$

$$n = 3, \quad \gamma = 4/3. \quad (61)$$

$n = 1.5$ değeri, adyabatik konveksiyondaki tek atomlu ideal gazı ve ayrıca rölativistik olmayan tamamen dejenere elektron gazını betimler. $n = 3$ değeri ise ışıyım basıncı baskın Eddington modelini ve ultra-rölativistik dejenere elektron gazını betimler.

Bir politrop için hidrostatik denge ve kütle sürekliliği

$$\frac{d}{dr} \left(\frac{r^2}{\rho} \frac{d}{dr} K \rho^{1+1/n} \right) = -4\pi G r^2 \rho. \quad (62)$$

hâline gelir. Lane–Emden dönüşümünün amacı boyutları ortadan kaldırmak ve bunu yalnızca n 'ye bağlı evrensel bir denkleme indirgemektir.

8. Lane–Emden Denkleminin Türetilmesi

Boyutsuz değişkenleri tanıtalım:

$$\rho(r) = \rho_c \theta^n(\xi), \quad (63)$$

ve

$$r = a \xi. \quad (64)$$

O hâlde basınç

$$P = K \rho_c^{1+1/n} \theta^{n+1}. \quad (65)$$

olur. Türev alalım:

$$\begin{aligned} \frac{dP}{dr} &= K \rho_c^{1+1/n} (n+1) \theta^n \frac{d\theta}{dr} \\ &= (n+1) K \rho_c^{1/n} \rho_c \theta^n \frac{d\theta}{dr}. \end{aligned} \quad (66)$$

$\rho = \rho_c \theta^n$ olduğundan,

$$\frac{1}{\rho} \frac{dP}{dr} = (n+1) K \rho_c^{1/n} \frac{d\theta}{dr}. \quad (67)$$

Bunu (20) içine yerleştirirsek,

$$(n+1) K \rho_c^{1/n} \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\theta}{dr} \right) = -4\pi G \rho_c \theta^n. \quad (68)$$

Şimdi $r = a \xi$ alalım; böylece

$$\frac{d}{dr} = \frac{1}{a} \frac{d}{d\xi}. \quad (69)$$

Ayrıca,

$$r^2 \frac{d\theta}{dr} = a \xi^2 \frac{d\theta}{d\xi}. \quad (70)$$

Dolayısıyla

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\theta}{dr} \right) = \frac{1}{a^2} \frac{1}{\xi^2} \frac{d}{d\xi} \left(\xi^2 \frac{d\theta}{d\xi} \right). \quad (71)$$

Şunu seçelim:

$$a^2 = \frac{(n+1)K}{4\pi G} \rho_c^{1/n-1}. \quad (72)$$

Böylece (68),

$$\frac{1}{\xi^2} \frac{d}{d\xi} \left(\xi^2 \frac{d\theta}{d\xi} \right) = -\theta^n. \quad (73)$$

biçimine indirgenir. Eşdeğer olarak,

$$\frac{d^2\theta}{d\xi^2} + \frac{2}{\xi} \frac{d\theta}{d\xi} + \theta^n = 0. \quad (74)$$

Düzenli merkez sınır koşulları

$$\theta(0) = 1, \quad \theta'(0) = 0. \quad (75)$$

şeklindedir. Yıldız yüzeyi ilk sıfırdadır:

$$\theta(\xi_1) = 0, \quad R = a \xi_1. \quad (76)$$

Not 3. Lane–Emden denklemi evrenseldir: sabit bir n için tüm boyutlu modeller yalnızca ölçek çarpanları a , ρ_c ve K bakımından farklılık gösterir.

Kütle (18)'den elde edilir:

$$\begin{aligned} m(r) &= 4\pi \int_0^r r'^2 \rho(r') dr' \\ &= 4\pi a^3 \rho_c \int_0^\xi \xi'^2 \theta^n d\xi'. \end{aligned} \quad (77)$$

(73) kullanılırsa,

$$\frac{d}{d\xi} (\xi^2 \theta') = -\xi^2 \theta^n. \quad (78)$$

0'dan ξ 'ye kadar integre edilirse,

$$\int_0^\xi \xi'^2 \theta^n d\xi' = -\xi^2 \theta'. \quad (79)$$

Dolayısıyla

$$m(\xi) = 4\pi a^3 \rho_c [-\xi^2 \theta'(\xi)]. \quad (80)$$

Toplam kütle

$$M = 4\pi a^3 \rho_c \omega_n, \quad (81)$$

burada

$$\omega_n = -\xi_1^2 \theta'(\xi_1). \quad (82)$$

Ortalama yoğunluk

$$\bar{\rho} = \frac{3M}{4\pi R^3} = 3\rho_c \frac{\omega_n}{\xi_1^3}. \quad (83)$$

olur. Bu nedenle

$$\frac{\rho_c}{\bar{\rho}} = \frac{\xi_1^3}{3\omega_n}. \quad (84)$$

9. Analitik Lane–Emden Çözümleri

$n = 0$ için (74) denklemi

$$\frac{1}{\xi^2} \frac{d}{d\xi} (\xi^2 \theta') = -1. \quad (85)$$

hâline gelir. ξ^2 ile çarpıp integre edersek,

$$\xi^2 \theta' = -\frac{\xi^3}{3} + C. \quad (86)$$

Düzenlilik $C = 0$ gerektirir; dolayısıyla

$$\theta' = -\frac{\xi}{3}. \quad (87)$$

$\theta(0) = 1$ ile ikinci bir integrasyon

$$\theta = 1 - \frac{\xi^2}{6}. \quad (88)$$

sonucunu verir. İlk sıfır

$$\xi_1 = \sqrt{6}. \quad (89)$$

şeklindedir. Kütle sabiti

$$\omega_0 = -\xi_1^2 \theta'(\xi_1) = 2\sqrt{6}. \quad (90)$$

olur.

$n = 1$ için Lane–Emden denklemi lineerdir:

$$\theta'' + \frac{2}{\xi} \theta' + \theta = 0. \quad (91)$$

Şunu alalım:

$$u = \xi \theta. \quad (92)$$

O hâlde

$$u'' + u = 0. \quad (93)$$

Düzenli çözüm

$$u = \sin \xi, \quad (94)$$

olduğundan

$$\theta = \frac{\sin \xi}{\xi}. \quad (95)$$

Kökte bu, $\theta(0) = 1$ limit değeri olarak anlaşılır. İlk sıfır

$$\xi_1 = \pi, \quad (96)$$

ve

$$\omega_1 = \pi. \quad (97)$$

olur.

$n = 5$ için, yerine koyarak

$$\theta = \left(1 + \frac{\xi^2}{3}\right)^{-1/2} \quad (98)$$

ifadesinin Lane–Emden denklemini sağladığı doğrulanabilir. Türev alma

$$\theta' = -\frac{\xi}{3} \left(1 + \frac{\xi^2}{3}\right)^{-3/2}. \quad (99)$$

sonucunu verir. θ sonlu bir sifıra sahip olmamakla birlikte,

$$\lim_{\xi \rightarrow \infty} \theta = 0, \quad (100)$$

kütle sonludur; çünkü

$$\lim_{\xi \rightarrow \infty} [-\xi^2 \theta'] = \sqrt{3}. \quad (101)$$

Dolayısıyla $n = 5$ politropu sonsuz yarıçapa fakat sonlu kütleyle sahiptir.

10. Merkez Yakınında Seri Açılımı

Sayısal integrasyon, görünürde tekil olan $2\theta'/\xi$ terimi nedeniyle tam olarak $\xi = 0$ 'dan başlatılamaz. Düzenli bir kuvvet serisiyle uygulanır:

$$\theta(\xi) = 1 + a_2 \xi^2 + a_4 \xi^4 + a_6 \xi^6 + \dots \quad (102)$$

Buna göre

$$\theta' = 2a_2 \xi + 4a_4 \xi^3 + 6a_6 \xi^5 + \dots, \quad (103)$$

ve

$$\theta'' = 2a_2 + 12a_4 \xi^2 + 30a_6 \xi^4 + \dots \quad (104)$$

(74) içindeki türev terimleri

$$\theta'' + \frac{2}{\xi} \theta' = 6a_2 + 20a_4 \xi^2 + 42a_6 \xi^4 + \dots \quad (105)$$

verir. Doğrusal olmayan terimi açalım:

$$\begin{aligned} \theta^n &= (1 + a_2 \xi^2 + a_4 \xi^4 + \dots)^n \\ &= 1 + na_2 \xi^2 + \left[na_4 + \frac{n(n-1)}{2} a_2^2 \right] \xi^4 + \dots \end{aligned} \quad (106)$$

(74) içinde kuvvetler eşitlenirse,

$$6a_2 + 1 = 0, \quad (107)$$

dolayısıyla

$$a_2 = -\frac{1}{6}. \quad (108)$$

ξ^2 mertebesinde,

$$20a_4 + na_2 = 0, \quad (109)$$

buradan

$$a_4 = \frac{n}{120}. \quad (110)$$

ξ^4 mertebesinde,

$$42a_6 + na_4 + \frac{n(n-1)}{2} a_2^2 = 0. \quad (111)$$

(108) ve (110) yerine konduğunda,

$$a_6 = -\frac{n(8n-5)}{15120}. \quad (112)$$

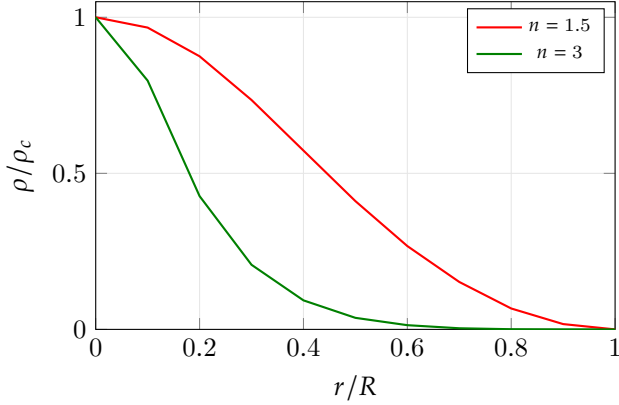
Böylece düzenli merkezî açılım

$$\theta = 1 - \frac{\xi^2}{6} + \frac{n\xi^4}{120} - \frac{n(8n-5)\xi^6}{15120} + \dots \quad (113)$$

olur.

Tablo 1. Seçilmiş Lane–Emden sabitleri. Burada ξ_1 ilk sıfır, $\omega_n = -\xi_1^2 \theta'(\xi_1)$ ve $\rho_c/\bar{\rho} = \xi_1^3/(3\omega_n)$ şeklindedir.

n	ξ_1	ω_n	$\rho_c/\bar{\rho}$
0	2.44949	4.89898	1.00
1	3.14159	3.14159	3.29
1.5	3.65375	2.71406	5.99
3	6.89685	2.01824	54.18
5	∞	1.73205	0

**Şekil 3.** $n = 1.5$ ve $n = 3$ için normalize yoğunluk profilleri. $n = 3$ modeli kütle için çok daha büyük bir bölümünü merkeze yakın yerleştirir; bu da büyük $\rho_c/\bar{\rho}$ değerini açıklar.

11. Sayısal Politropik Sabitler

Buradaki en önemli iki analitik olmayan durum $n = 1.5$ ve $n = 3$ 'tür. (113) ile başlatılan (74) denkleminin doğrudan sayısal integrasyonu

$$\xi_1(n = 1.5) = 3.65375, \quad (114)$$

$$\omega_{1.5} = 2.71406, \quad (115)$$

ve

$$\xi_1(n = 3) = 6.89685, \quad (116)$$

$$\omega_3 = 2.01824. \quad (117)$$

sonuçlarını verir. (84) kullanılarak,

$$\begin{aligned} \frac{\rho_c}{\bar{\rho}}(n = 1.5) &= \frac{(3.65375)^3}{3(2.71406)} \\ &= 5.99, \end{aligned} \quad (118)$$

ve

$$\begin{aligned} \frac{\rho_c}{\bar{\rho}}(n = 3) &= \frac{(6.89685)^3}{3(2.01824)} \\ &= 54.18. \end{aligned} \quad (119)$$

bulunur. Dolayısıyla $n = 3$ modeli, $n = 1.5$ modelinden çok daha merkezi yoğunlaşmıştır.

12. Kütle–Yarıçap Bağantısı

Boyutlu yarıçap

$$R = a\xi_1, \quad (120)$$

olup,

$$a = \left[\frac{(n+1)K}{4\pi G} \right]^{1/2} \rho_c^{(1-n)/(2n)}. \quad (121)$$

şeklindedir. Dolayısıyla

$$R = \xi_1 \left[\frac{(n+1)K}{4\pi G} \right]^{1/2} \rho_c^{(1-n)/(2n)}. \quad (122)$$

Benzer biçimde,

$$M = 4\pi\omega_n \left[\frac{(n+1)K}{4\pi G} \right]^{3/2} \rho_c^{(3-n)/(2n)}. \quad (123)$$

ρ_c ortadan kaldırılın. (122)'den,

$$\rho_c^{(1-n)/(2n)} = \frac{R}{\xi_1} \left[\frac{4\pi G}{(n+1)K} \right]^{1/2}. \quad (124)$$

$(3-n)/(1-n)$ kuvvetine yükseltirsek,

$$\rho_c^{(3-n)/(2n)} = \left[\frac{R}{\xi_1} \left(\frac{4\pi G}{(n+1)K} \right)^{1/2} \right]^{(3-n)/(1-n)}. \quad (125)$$

(123) içine yerine koyma

$$M = C_n K^{n/(n-1)} R^{(3-n)/(1-n)}, \quad (126)$$

sonucunu verir; burada

$$C_n = 4\pi\omega_n \left[\frac{n+1}{4\pi G} \right]^{n/(n-1)} \xi_1^{(n-3)/(1-n)}. \quad (127)$$

Eşdeğer olarak,

$$R \propto K^{n/(3-n)} M^{(1-n)/(3-n)} \quad (n \neq 3). \quad (128)$$

Özel $n = 3$ durumu doğrudan (123)'den çıkar. ρ_c üssü sıfır olduğundan,

$$M = 4\pi\omega_3 \left[\frac{4K}{4\pi G} \right]^{3/2}, \quad n = 3. \quad (129)$$

Dolayısıyla sabit K için kütle yarıçaptan ve merkezî yoğunluktan bağımsızdır. Bu matematiksel olgu, rölativistik olarak dejenere beyaz cüceler için Chandrasekhar sınır kütlelerinin kökenidir.

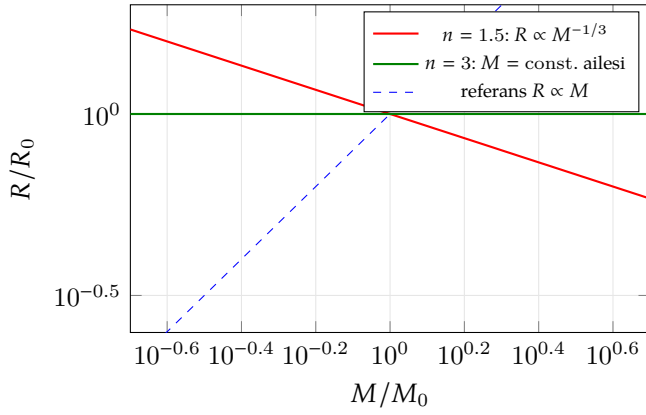
$n = 1.5$ için (128),

$$R \propto K M^{-1/3}, \quad (130)$$

veya eşdeğer olarak

$$M \propto K^3 R^{-3}. \quad (131)$$

hâline gelir. Bu ters kütle–yarıçap bağıntısı rölativistik olmayan beyaz cüceler için ayırt edici özelliğidir: kütle eklemek yıldızı küçültür.



Şekil 4. Sabit politropik sabitte kütle-yarıçap ölçeklenmeleri. $n = 1.5$ eğrisi rölativistik olmayan dejenerasyon için uygundur. $n = 3$ durumu tekindir: sabit K için kütle sabitken yarıçap merkezî yoğunlukla değişir.

13. Çalışılmış Sayısal Uygulamalar

13.1. Güneş hidrostatik ölçekleri

(5) kullanılarak Güneş ortalama yoğunluğu

$$\begin{aligned}\bar{\rho}_{\odot} &= \frac{3M_{\odot}}{4\pi R_{\odot}^3} \\ &= \frac{3(1.9885 \times 10^{30})}{4\pi(6.957 \times 10^8)^3} \\ &= 1.41 \times 10^3 \text{ kg m}^{-3}.\end{aligned}\quad (132)$$

Serbest düşme ya da dinamik zaman

$$t_{\text{dyn}} \sim (G\bar{\rho})^{-1/2}.\quad (133)$$

şeklindedir. Güneş için,

$$\begin{aligned}t_{\text{dyn},\odot} &= [(6.6743 \times 10^{-11})(1.41 \times 10^3)]^{-1/2} \\ &= 3.26 \times 10^3 \text{ s}.\end{aligned}\quad (134)$$

Bu yaklaşık bir saattir ve Güneş yaşından son derece kısadır. Bu nedenle hidrostatik denge anakol evrimi için mükemmel bir yaklaşımdır.

Güneş bir $n = 3$ politropu ile yaklaşıtılsaydı, merkezî yoğunluğu

$$\rho_c = 54.18 \bar{\rho}_{\odot} = 7.64 \times 10^4 \text{ kg m}^{-3}.\quad (135)$$

olurdu. Bu, ayrıntılı Güneş modeli değerlerine mertebe bakımından yakındır.

13.2. Tamamen konvektif yıldızlar

Kimyasal olarak homojen bir konvektif bölgede tabakalaşma neredeyse adyabatiktir:

$$P\rho^{-\gamma_{\text{ad}}} = \text{constant}.\quad (136)$$

Tek atomlu ideal gaz için,

$$\gamma_{\text{ad}} = \frac{5}{3}.\quad (137)$$

Dolayısıyla

$$1 + \frac{1}{n} = \frac{5}{3},\quad (138)$$

ve

$$n = \frac{3}{2}.\quad (139)$$

Düşük kütleli anakol yıldızları ve anakol öncesi Hayashi-izi yıldızları bu nedenle çoğu kez $n = 1.5$ politroplarıyla iyi temsil edilir. Görece küçük merkezî yoğunlaşmaları,

$$\frac{\rho_c}{\bar{\rho}} = 5.99,\quad (140)$$

etkin konvektif entropi karışımını yansıtır.

13.3. Rölativistik olmayan beyaz cüceler

Tamamen dejenere, rölativistik olmayan bir elektron gazının basıncı

$$P = K_{\text{NR}}\rho^{5/3},\quad (141)$$

olup,

$$K_{\text{NR}} = \frac{\hbar^2}{5m_e}(3\pi^2)^{2/3} \frac{1}{(\mu_e m_H)^{5/3}}.\quad (142)$$

şeklindedir. Bu bir $n = 1.5$ politropudur. Dolayısıyla

$$R \propto M^{-1/3}.\quad (143)$$

Fizik açıktır: M arttıkça kütleçekim artar; yıldız elektron gazını sıkıştırarak, Fermi momentumunu ve dejenerasyon basıncını yükselterek yanıt verir. Desteği ısınma değil sıkışma sağlar; bu nedenle daha kütleli rölativistik olmayan bir beyaz cüce daha küçüktür.

13.4. Rölativistik dejenerasyon ve Chandrasekhar ölçeği

Ultra-rölativistik dejenere elektronlar için,

$$P = K_R\rho^{4/3},\quad (144)$$

burada

$$K_R = \frac{\hbar c}{4}(3\pi^2)^{1/3} \frac{1}{(\mu_e m_H)^{4/3}}.\quad (145)$$

Bu bir $n = 3$ politropudur. (129) denklemi bir sınır kütlelerini ima eder:

$$M_{\text{Ch}} \propto K_R^{3/2} G^{-3/2}.\quad (146)$$

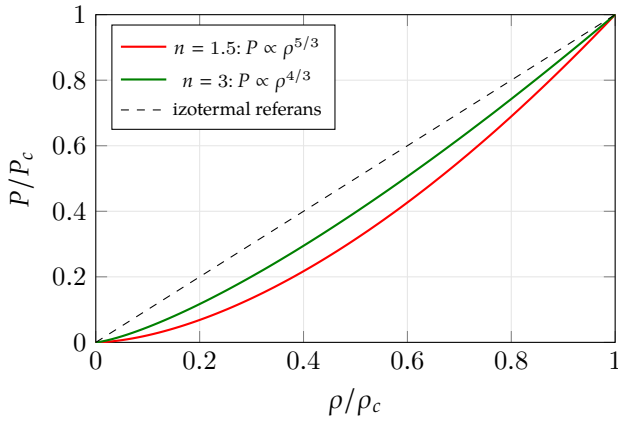
Tam bir inceleme

$$M_{\text{Ch}} \simeq \frac{5.83}{\mu_e^2} M_{\odot}.\quad (147)$$

sonucunu verir. Karbon-oksijen maddesi için $\mu_e \simeq 2$ olduğundan,

$$M_{\text{Ch}} \simeq 1.46 M_{\odot}.\quad (148)$$

$n = 3$ 'teki politropik tekillik bu nedenle matematiksel bir merak değildir; soğuk elektron dejenerasyonunun bir Newtoncu yıldızı artık kararlı kılamayacağı sınırı işaret eder.



Şekil 5. Normalize politropik hal denklemleri. $n = 1.5$ bağıntısı $n = 3$ bağıntısından daha katıdır; bu nedenle $n = 1.5$ konfigürasyonları daha az merkezî yoğunlaşmıştır.

14. Tartışma

Yukarıda geliştirilen kuram güçlüdür; çünkü özkütle çekimin mekanik sonuçlarını yalıtır. Hidrostatik denge, (10), basıncın mikroskobik kökenine hiçbir gönderme içermez. Gaz basıncı, ısıtım basıncı, dejenerasyon basıncı, türbülans basıncı ve manyetik gerilmeler gerilme yasası değiştirilerek dâhil edilebilir. Politropik yaklaşım, basıncın neredeyse sabit entropi ya da sabit bileşim altında yoğunluğun basit bir kuvveti olarak ifade edilebildiği her durumda başarılıdır.

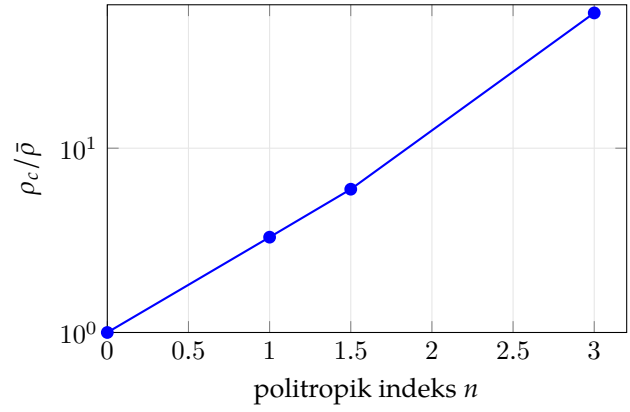
Sınırlılıkları da aynı derecede önemlidir. Gerçek yıldızlar tam politrop değildir. Bileşim gradyanlarına, iyonlaşma bölgelerine, nükleer enerji kaynaklarına, opaklığa bağlı ışımsal taşınım, konveksiyona, dönmeye, manyetik alanlara ve kütle kaybına sahiptirler. Örneğin Güneş, içinin büyük bölümünde ışımsaldır ve yalnızca dış zarfında konvektiftir. Tek bir $n = 3$ politropu merkezî yoğunlaşmasını düzgün bir modelden daha iyi yakalar; ancak ayrıntılı helioseismik Güneş modelleri gerçekçi mikrofizikle birlikte tam yıldız yapısı denklemlerini gerektirir [10, 11].

Virial teoremi hidrostatik dengeden daha geneldir. Tensör biçiminde çarpışmasız yıldız sistemlerine, moleküler bulutlara ve karanlık madde halelerine uygulanır [8]. Yüzey basıncı, dönme, manyetik alanlar ve zamana bağlı atalet (40) denkleminde terimler ekler. Örneğin, basınçla sınırlanmış bir moleküler bulut

$$3 \int P dV + \Omega = 3P_s V, \quad (149)$$

bağıntısını sağlar; burada P_s dış yüzey basıncıdır. Dönen bir yıldız ek bir pozitif dönme kinetik enerjisi terimine sahiptir; bu da sabit kütle ve yarıçapta gerekli basınç desteğini azaltır.

$n = 3$ durumu özel vurgu gerektirir. Sabit K için kütle bağımsızlığı ölçek değişmezliğinden kaynaklanır: $\gamma = 4/3$ için basınç ve kütleçekim homolog sıkışma altında aynı şekilde ölçeklenir. Işıtım baskın büyük kütleli yıldızların marjinal dinamik kararlılığa yakın olmasının ve rölativistik dejenerasyonun Chandrasekhar



Şekil 6. Merkezî yoğunlaşmanın politropik indeksle artışı. Daha büyük n daha yumuşak bir hal denkleminde ve dolayısıyla daha güçlü merkezî yoğunlaşmaya karşılık gelir.

kütlesine yol açmasının nedeni budur. Genel görelilik, ters beta bozunması, Coulomb düzeltmeleri ve sonlu sıcaklık etkileri kesin sınır kütlesini değiştirir; ancak Newtoncu $n = 3$ politropu belirleyici fiziği tanımlar [4, 7].

$n = 1.5$ için durum daha karardır. Hal denklemleri daha katıdır, $\gamma = 5/3$; dolayısıyla sıkışma, basıncı homolog kütleçekimin gerektirdiğinden daha hızlı artırır. Bu yüzden tamamen konvektif yıldızlar ve kahverengi cüceler görece geniş yoğunluk profillerine sahiptir; rölativistik olmayan beyaz cüceler ise sağlam ters kütle-yarıçap yasasını izler. Gözlenen beyaz cüce yarıçapları, sonlu sıcaklık, zarf bileşimi, kristalleşme ve rölativistik düzeltmelerin neden olduğu sapmalarla birlikte bu eğilimi genel olarak doğrular.

Modern yıldız evrimi kodları burada türetilen aynı mekanik denklemleri çözer; ancak bunları nükleer reaksiyon ağları, opaklık tabloları, hal denklemleri, difüzyon, konveksiyon reçeteleri ve atmosfer sınır koşullarıyla bağlar. Yine de politropik çözümler vazgeçilmez olmaya devam eder. Analitik denetimler, ölçeklenme bağıntıları, başlangıç modelleri ve fiziksel sezgi sağlarlar. ξ_1 , ω_n ve $\rho_c/\bar{\rho}$ gibi sabitlerine kompakt nesne kuramında, yıldız pulsasyon kuramında ve yıldız oluşumu çalışmalarında hâlâ sıkça rastlanır.

15. Sonuç

Newtoncu momentum korunumundan başlayarak hidrostatik denklemi

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{Gm\rho}{r^2} \quad (150)$$

ve kütle-sürekliliği denklemini

$$\frac{dm}{dr} = 4\pi r^2 \rho. \quad (151)$$

türettik. Bu denklemler GM^2/R^4 mertebesinde merkezî basınçlar gerektirir ve yıldız içlerinin neden aşırı yüksek basınçlı sistemler olduğunu gösterir.

Hidrostatik dengeyi $4\pi r^3$ ile çarpıp integre ederek skaler virial teoremini,

$$3 \int P dV + \Omega = 0, \quad (152)$$

ve tek atomlu ideal gaz için

$$2K + \Omega = 0. \quad (153)$$

elde ettik. Bu, Kelvin–Helmholtz zamanını, kütleçekimsel sıcaklık ölçeğini ve özkütleçekimli gazın negatif ısı kapasitesini açıklar.

Politroplar için, $P = K\rho^{1+1/n}$, boyutsuzlaştırma Lane–Emden denkleminde götördü:

$$\frac{1}{\xi^2} \frac{d}{d\xi} \left(\xi^2 \frac{d\theta}{d\xi} \right) = -\theta^n, \quad (154)$$

burada $\theta(0) = 1$ ve $\theta'(0) = 0$ 'dır. Analitik $n = 0, 1, 5$ durumları ve sayısal $n = 1.5, 3$ durumları, sıkıştırılabilirliğin merkezî yoğunlaşmayı nasıl denetlediğini ortaya koyar. Sabitler

$$\xi_1 = 3.65375, \quad \omega_{1.5} = 2.71406 \quad (155)$$

ve

$$\xi_1 = 6.89685, \quad \omega_3 = 2.01824 \quad (156)$$

sırasıyla $\rho_c/\bar{\rho} = 5.99$ ve 54.18 değerlerini verir.

Son olarak, kütle–yarıçap bağıntısı

$$M \propto K^{n/(n-1)} R^{(3-n)/(1-n)} \quad (157)$$

sabit K için $n = 1.5$ yıldızlarının $R \propto M^{-1/3}$ bağıntısına uyduğunu, $n = 3$ yıldızlarının ise yarıçaptan bağımsız kütleyle sahip olduğunu gösterir. Bu iki durum, konvektif yıldızların, beyaz cücelerin, ışıyım baskın yıldızların ve Chandrasekhar kütesinin fiziğinin temelinde yatar. Bu nedenle klasik kuram yalnızca pedagojik değildir; yıldız astrofiziğinin büyük bölümünü düzenleyen baskın dengelerin özlü bir ifadesidir.

Kaynaklar

- [1] J. H. Lane, "On the theoretical temperature of the Sun under the hypothesis of a gaseous mass maintaining its volume by its internal heat and depending on the laws of gases known to terrestrial experiment," *American Journal of Science*, vol. 50, pp. 57–74, 1870.
- [2] R. Emden, *Gaskugeln: Anwendungen der mechanischen Wärmetheorie auf kosmologische und meteorologische Probleme*. Leipzig: Teubner, 1907.
- [3] A. S. Eddington, *The Internal Constitution of the Stars*. Cambridge: Cambridge University Press, 1926.
- [4] S. Chandrasekhar, *An Introduction to the Study of Stellar Structure*. Chicago: University of Chicago Press, 1939.

- [5] J. P. Cox and R. T. Giuli, *Principles of Stellar Structure*. New York: Gordon and Breach, 1968.
- [6] D. D. Clayton, *Principles of Stellar Evolution and Nucleosynthesis*. Chicago: University of Chicago Press, 1983.
- [7] S. L. Shapiro and S. A. Teukolsky, *Black Holes, White Dwarfs, and Neutron Stars: The Physics of Compact Objects*. New York: Wiley, 1983.
- [8] J. Binney and S. Tremaine, *Galactic Dynamics*, 2. baskı. Princeton: Princeton University Press, 2008.
- [9] C. J. Hansen, S. D. Kawaler, and V. Trimble, *Stellar Interiors: Physical Principles, Structure, and Evolution*, 2. baskı. New York: Springer, 2004.
- [10] J. N. Bahcall and M. H. Pinsonneault, "What do we not know theoretically about solar neutrino fluxes?" *Physical Review Letters*, vol. 92, 121301, 2004.
- [11] R. Kippenhahn, A. Weigert, and A. Weiss, *Stellar Structure and Evolution*, 2. baskı. Berlin: Springer, 2012.
- [12] B. W. Carroll and D. A. Ostlie, *An Introduction to Modern Astrophysics*, 2. baskı. Cambridge: Cambridge University Press, 2017.