



NÜKLEER ASTROFİZİK

Gamow Zirvesi, Kuantum Tünelleme Olasılığı ve p-p Zinciri Reaksiyon Kinetiğinin Analitik İncelemesi

Akademik Araştırma Makalesi

Teorik Astrofizik — Adım Adım Analitik Türetimler, Vektör Diyagramları ve Sayısal Tablolar

Gamow Zirvesi, Kuantum Tünelleme Olasılığı ve p-p Zinciri Reaksiyon Kinetiğinin Analitik İncelemesi

Nükleer Astrofizik

Eylül 2026

Özet. Proton–proton zinciri, Güneş ışınrlığının baskın kaynağı ve zayıf perdelenmiş, dejenere olmayan bir yıldız plazmasında termonükleer yanmanın paradigmatik örneğidir. Hızı üç olgunun birleşimiyle denetlenir: Coulomb engeli Güneş çekirdeği ısı enerjilerinde klasik olarak aşılamazdır, kuantum tünelleme üstel olarak küçük bir nüfuz etme olasılığı sağlar ve başlatıcı reaksiyon $p + p \rightarrow d + e^+ + \nu_e$ bir zayıf etkileşimdir. Bu makale Gamow zirvesi, WKB tünelleme çarpanı, astrofiziksel S-çarpanı, Maxwell–Boltzmann ortalaması ve pp zincirinin reaksiyon kinetiği üzerine kendi içinde bütünlüklü analitik bir inceleme sunar. Engel nüfuz etme çarpanı $\exp(-2\pi\eta)$, Gauss birimlerinde $\exp(-b/E^{1/2})$ biçimi, eyer noktası enerjisi $E_0 = (bkT/2)^{2/3}$ ve genişlik $\Delta = 4(E_0 kT/3)^{1/2}$ türetilir. Ardından bu formüller Güneş çekirdeğine ilişkin sayısal ölçeklere, perdeleme düzeltmelerine, sıcaklık üslerine, döteryum ve ^3He denge bolluklarına, ppI, ppII ve ppIII arasındaki kol rekabetine, nötrino tayflarına ve gözlemsel sınamalara bağlanır. Vurgu, açık türetimler ve fiziksel yorum üzerinedir.

Anahtar Kelimeler: nükleer astrofizik; Gamow zirvesi; proton–proton zinciri; kuantum tünelleme; Güneş nötrinoları; yıldız iç yapıları

1. Giriş

Bir anakol yıldızının ışınrlığı, nihai olarak, kendi kütle-çekimi altındaki bir plazmaya dayatılan bir nükleer fizik sınır koşuludur. Hidrostatik denge yaklaşık merkezî sıcaklığı belirler, ışınsal ve konvektif taşınım ısı tabakalaşmayı kurar ve nükleer reaksiyonlar yıldızın milyarlarca yıl boyunca yarı-statik dengeyi sürdürüp sürdüremeyeceğini tayin eder. Güneş için merkezî sıcaklık yalnızca yaklaşık 1.5×10^7 K olup bir kiloelektronvolta yakın ısı enerjije karşılık gelir. Bu, nükleer uzaklıklarda iki protonun elektrostatik itmesine kıyasla çok küçüktür. Dolayısıyla Güneş yanmasının sürekliliği, kuantum mekaniğinin doğrudan bir tezahürüdür.

Tarihsel gelişim iyi bilinmektedir, ancak pedagojik açıdan önemini korur. Eddington yıldız ışınsırlıklarının atomaltı enerji kaynakları gerektirdiğini ileri sürmüştür [1]. Gamow Coulomb engelini kuantum nüfuzunu ortaya koymuş [2], Atkinson ve Houtermans ise engel nüfuzunu yıldızsal dönüşümlere uygulamıştır [3]. Bethe ve Critchfield proton–proton reaksiyonunu ve bunun Güneş enerji üretimindeki rolünü tanımlamıştır [4]; Bethe daha sonra CNO çevrimi dâhil hidrojen yanmasını sistematik hâle getirmiştir [5]. Modern incelemeler bu resmi plazma perdelemesi, duyarlı zayıf-etkileşim matris elemanları, ışınsal düzeltmeler, güncellenmiş Güneş bileşimi, nötrino çeşni dönüşümü ve helyosismik kısıtları dâhil ederek inceltir [9, 12, 15].

Merkezî kavramsal sorun *Gamow zirvesi*dir. Maxwell–Boltzmann dağılımı enerjik iyonlardan üstel olarak küçük bir popülasyon sağlarken, Coulomb tünelleme olasılığı enerjiyle üstel olarak artar. Bu ikisinin çarpımı, kT 'nin oldukça üzerinde fakat Coulomb engeli yüksekliğinin çok altında bir enerjide keskin bir maksimuma sahiptir. Bu dar pencere termonükleer reaksiyon hızını

belirler. Rezonanssız bir yüklü parçacık reaksiyonu için tesir kesiti, yavaş değişen bir astrofiziksel S-çarpanı ile hızlı değişen üstel engel çarpanının çarpımı olarak yazılır. Bu ayrım, nükleer astrofiziğin merkezî sadeleştirici fikirlerinden biridir.

pp zincirinin ek bir özelliği vardır: ilk reaksiyonu,

$$p + p \rightarrow d + e^+ + \nu_e, \quad (1)$$

bir protonun nötrona dönüşmesini gerektirir. Bu nedenle zayıf etkileşim aracılığıyla gerçekleşir ve sıradan güçlü ya da elektromanyetik nükleer reaksiyonlardan son derece yavaştır. Bu darboğaz yıldız evrimi için bir sakınca değildir; Güneş gibi yıldızların milyarlarca yıl yaşamasının nedenidir.

Bu makale problemin analitik yapısını geliştirir. Bölüm 2 fiziksel varsayımları ortaya koyar. Bölüm 3–6 Coulomb engelini, WKB nüfuz etme çarpanını, S-çarpanını ve ısı ortalamayı türetilir. Bölüm 7 sıcaklık duyarlılığını türetilir. Bölüm 8 perdeleme ve sabit olmayan $S(E)$ dâhil kontrollü inceltmeleri tartışır. Bölüm 9–10 pp-zinciri ağını ve denge bolluklarını betimler. Bölüm 11 ve 12 ayrıntılı sayısal tahminler verir. Bölüm 13 gözlemsel sınamaları tartışır ve Ek, ana türetimde atlanan ayrıntılı cebiri sağlar.

2. Fiziksel ve Matematiksel Çerçeve

Yerel termodinamik dengede bulunan seyrek, dejenere olmayan, zayıf bağlı bir plazmayı ele alıyoruz. İyonlar Maxwell–Boltzmann hız dağılımlarına sahiptir ve nükleer reaksiyonlar ikili karşılaşmalarda gerçekleşir. Yükleri $Z_1 e$ ve $Z_2 e$, kütleleri m_1 ve m_2 , bağlı hızları v olan iki çekirdek için indirgenmiş kütle

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}. \quad (2)$$

şeklinde. Kütle merkezi kinetik enerjisi

$$E = \frac{1}{2} \mu v^2. \quad (3)$$

Tünelleme türetimi boyunca Gauss cgs birimlerini kullanıyoruz; dolayısıyla Coulomb potansiyeli

$$V(r) = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{r}. \quad (4)$$

olur. Burada e^2 enerji çarpı uzunluk boyutlarına sahiptir. Sayısal olarak,

$$e^2 = 1.440 \text{ MeV fm} \quad (5)$$

kullanışlı bir karma birim özdeşliğidir.

1 ve 2 türleri için birim hacim başına nükleer reaksiyon hızı

$$r_{12} = \frac{n_1 n_2}{1 + \delta_{12}} \langle \sigma v \rangle, \quad (6)$$

şeklinde; burada n_i sayı yoğunluklarıdır ve δ_{12} özdeş reaktanların çift sayılmasını önler. Isıl ortalamalı reaktivite

$$\langle \sigma v \rangle = \int_0^\infty \sigma(v) v f(v) dv. \quad (7)$$

olarak verilir. Bağlı-hız dağılımı Maxwell dağılımıdır:

$$f(v) dv = 4\pi v^2 \left(\frac{\mu}{2\pi kT} \right)^{3/2} \exp \left(-\frac{\mu v^2}{2kT} \right) dv. \quad (8)$$

Tanım 1. Tüm nükleer-yapı bağımlılığı üstel Coulomb ve Maxwell çarpanlarına kıyasla yavaş değişiyorsa, bir reaksiyon Gamow penceresi boyunca *rezonanssız* olarak adlandırılır. Bu durumda astrofiziksel bir S-çarpanı tanımlamak yararlıdır.

Yukarıdaki varsayımlar Güneş çekirdeğinde mükemmel derecede geçerlidir. Plazma bağlanma parametresi küçüktür, elektron dejenerasyonu hafiftir ve yerel ısıl denge Coulomb saçılmasıyla nükleer zaman ölçeklerinden çok daha kısa zaman ölçeklerinde korunur [10, 11]. İyon bağlanmasının kullanışlı bir ölçüsü

$$\Gamma_i = \frac{Z_i^2 e^2}{a_i kT}, \quad (9)$$

olup iyon-küre yarıçapı

$$a_i = \left(\frac{3}{4\pi n_i} \right)^{1/3}. \quad (10)$$

ile tanımlanır. Güneş çekirdeği protonları için Γ_i birlikten oldukça küçüktür; dolayısıyla plazma güçlü bağlı bir sıvı değildir. Bu, Coulomb etkilerini nükleer reaksiyon probleminin yeniden yapılanması olarak değil, perturbatif perdeleme düzeltmeleri olarak ele almayı haklı çıkarır.

3. Coulomb Engeli ve Klasik İmkânsızlık

Bir nükleer yarıçap R 'de Coulomb engeli yüksekliği yaklaşık olarak

$$V_C(R) = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{R}. \quad (11)$$

şeklinde. İki proton için $Z_1 = Z_2 = 1$ 'dir. Karakteristik bir nükleer etkileşim yarıçapı

$$R \simeq 2 \text{ fm}, \quad (12)$$

alınırsa

$$V_C(R) \simeq \frac{1.440 \text{ MeV fm}}{2 \text{ fm}} = 0.720 \text{ MeV}. \quad (13)$$

elde edilir. $T = 1.5 \times 10^7 \text{ K}$ için

$$kT = (8.6173 \times 10^{-5} \text{ eV K}^{-1})T, \quad (14)$$

dolayısıyla

$$kT \simeq 1.29 \times 10^3 \text{ eV} = 1.29 \text{ keV}. \quad (15)$$

Böylece

$$\frac{V_C}{kT} \simeq \frac{720 \text{ keV}}{1.29 \text{ keV}} \simeq 5.6 \times 10^2. \quad (16)$$

Bir ısıl proton çifti bu nedenle sözde nükleer Coulomb engelinden enerjisinden neredeyse üç merteye eksiktir.

Bir çarpışma enerjisi E için klasik dönüm noktası $V(r_c) = E$ ile tanımlanır:

$$r_c = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{E}. \quad (17)$$

$E = 6 \text{ keV}$ 'de pp çarpışmaları için

$$r_c = \frac{1.440 \text{ MeV fm}}{0.006 \text{ MeV}} = 240 \text{ fm}. \quad (18)$$

Bu, güçlü nükleer kuvvetin menziline kabaca iki merteye daha büyüktür. Klasik olarak, Güneş çekirdeği enerjisine sahip bir proton çifti çekici nükleer etkileşimi deneyimlemeyen çok önce geri döner.

Fiziksel sonuç açıktır: Güneş'te hidrojen yanması klasik engel-üstü çarpışmalarla açıklanamaz. Klasik temas gerekli kılınırsa, yüksek enerjili Maxwell kuyruğu bile yetersizdir; $kT \simeq 1.3 \text{ keV}$ 'lik bir gazda $E \sim 0.7 \text{ MeV}$ enerjili parçacıklar bulma olasılığı $\exp(-560)$ ile orantılıdır. Kuantum tünelleme vazgeçilmezdir.

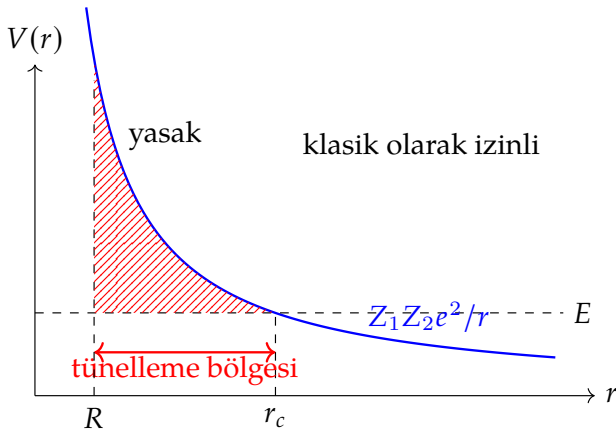
4. WKB Nüfuz Etme Çarpanı

Tek boyutlu bir engel için WKB geçiş olasılığı yaklaşık olarak

$$P \simeq \exp \left[-2 \int_{r_1}^{r_2} \kappa(r) dr \right], \quad (19)$$

şeklinde; burada

$$\kappa(r) = \frac{1}{\hbar} [2\mu\{V(r) - E\}]^{1/2}. \quad (20)$$



Şekil 1. Gauss birimlerinde iki yüklü çekirdek için Coulomb engeli. Enerjisi E olan bir parçacığın dış klasik dönüm noktası $r_c = Z_1 Z_2 e^2 / E$ 'dir. Füzyon, r_c 'den nükleer yarıçap R 'ye nüfuz etmeyi gerektirir.

Yüklü parçacık füzyonu için yasak bölge nükleer yarıçap R 'den dış dönüm noktası r_c 'ye uzanır. Baskın üsteli elde etmek için R, r_c 'ye kıyasla ihmal edilir. Böylece

$$P(E) \simeq \exp \left[-\frac{2}{\hbar} \int_R^{r_c} \sqrt{2\mu \left(\frac{Z_1 Z_2 e^2}{r} - E \right)} dr \right]. \quad (21)$$

$$a = Z_1 Z_2 e^2. \quad (22)$$

olsun. $r_c = a/E$ olduğundan

$$r = r_c x, \quad dr = r_c dx. \quad (23)$$

yazılır. O hâlde

$$\frac{a}{r} - E = E \left(\frac{1}{x} - 1 \right), \quad (24)$$

$$\int_R^{r_c} \sqrt{\frac{a}{r} - E} dr = r_c E^{1/2} \int_{R/r_c}^1 \sqrt{\frac{1-x}{x}} dx. \quad (25)$$

$R/r_c \ll 1$ için alt sınır sıfıra alınabilir:

$$I_0 = \int_0^1 x^{-1/2} (1-x)^{1/2} dx. \quad (26)$$

$x = \sin^2 \theta$ ile

$$I_0 = \int_0^{\pi/2} 2 \cos^2 \theta d\theta, \quad (27)$$

$$= \left[\theta + \frac{1}{2} \sin 2\theta \right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{2}. \quad (28)$$

Dolayısıyla

$$\int_0^{r_c} \sqrt{2\mu \left(\frac{a}{r} - E \right)} dr = \sqrt{2\mu} r_c E^{1/2} \frac{\pi}{2}, \quad (29)$$

$$= \frac{\pi a}{2} \sqrt{\frac{2\mu}{E}}. \quad (30)$$

(19) içine yerine koymak

$$P(E) \simeq \exp \left[-\frac{\pi a}{\hbar} \sqrt{\frac{2\mu}{E}} \right]. \quad (31)$$

sonucunu verir.

Sommerfeld parametresi

$$\eta = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{\hbar v}. \quad (32)$$

ile tanımlanır. $v = (2E/\mu)^{1/2}$ kullanılarak

$$2\pi\eta = \frac{2\pi Z_1 Z_2 e^2}{\hbar} \sqrt{\frac{\mu}{2E}} = \frac{\pi Z_1 Z_2 e^2}{\hbar} \sqrt{\frac{2\mu}{E}}. \quad (33)$$

bulunur. Bu nedenle

$$P(E) \simeq \exp(-2\pi\eta). \quad (34)$$

Tanım 2. Gauss birimlerinde

$$b = \frac{\pi \sqrt{2\mu} Z_1 Z_2 e^2}{\hbar}. \quad (35)$$

tanımlansın. O hâlde Gamow nüfuz etme çarpanı

$$\exp(-2\pi\eta) = \exp \left(-\frac{b}{E^{1/2}} \right). \quad (36)$$

olur. Üstelde kullanılan enerji birimleriyle aynı birimlerde E ölçülmek koşuluyla, b 'nin boyutu enerji^{1/2}'dir.

Sonlu bir nükleer yarıçap üsteli $(R/r_c)^{1/2}$ mertebesindeki terimlerle düzeltilir. Bu düzeltmeler genellikle yavaş değişen nükleer çarpma soğurur. Temel nokta, Coulomb fiziğinin $E^{-1/2}$ 'ye evrensel bir üstel bağımlılık katkısı vermesidir.

5. Astrofiziksel S-Çarpanı

Rezonanssız yüklü parçacık reaksiyonları için tesir kesiti geleneksel olarak

$$\sigma(E) = \frac{S(E)}{E} \exp(-2\pi\eta). \quad (37)$$

şeklinde yazılır. Eşdeğer olarak,

$$S(E) = \sigma(E) E \exp(2\pi\eta). \quad (38)$$

$1/E$ çarpanı giriş kanalının geometrik ve de Broglie ölçeklenmesini temsil ederken, $\exp(-2\pi\eta)$ Coulomb baskılanmasını yalıtır. Kalan fonksiyon $S(E)$ nükleer matris elemanlarını, spin çarpanlarını, elektromanyetik ya da zayıf geçiş genliklerini ve kısa menzilli güçlü-etkileşim etkilerini içerir.

Yavaş değişen bir $S(E)$ için sıfır enerji yakınında açılım yapılır:

$$S(E) = S(0) + ES'(0) + \frac{E^2}{2} S''(0) + \dots \quad (39)$$

Rezonanssız yaklaşım Gamow penceresi boyunca

$$S(E) \simeq S(E_0) \simeq S(0) \quad (40)$$

alır. Bu çoğu kez pp reaksiyonu için doğrudur; çünkü ilgili enerjiler yalnızca birkaç keV olup nükleer uyarılma ölçeklerinin çok altındadır. Buna karşılık rezonanslı reaksiyonlarda $S(E)$ hızla değişebilir ve eyer noktası yaklaşımı değiştirilmelidir.

Not 1. pp reaksiyonu, geçiş zayıf olduğu için olağanüstü küçük bir S-çarpımına sahiptir. Temsili modern bir değer $S_{11}(0) \approx 4.01 \times 10^{-22}$ keV barn'dır [12]. Güçlü yüklü parçacık reaksiyonları tipik olarak çok daha büyük mertebelerde S-çarpımlarına sahiptir.

pp reaksiyonu için $S(E)$ içinde neyin gizli olduğunu açıkça belirtmek yararlıdır. En kısa uzaklıklarda iki proton, bir proton beta dönüşümü geçirdikten sonra döteronla eşleşecek doğru spin ve yörüngesel kuantum sayılarına sahip iki-cisim saçılma durumunda olmalıdır. Sembolik olarak, zayıf matris elemanı

$$M_{pp} \propto G_F \langle d | O_{GT} | pp \rangle, \quad (41)$$

yapısına sahiptir; burada G_F Fermi sabiti, O_{GT} ise bas-
kın Gamow–Teller eksenel operatörünü gösterir. (41) içindeki örtüşme kısa menzillidir; buna karşılık Coulomb dalga fonksiyonu protonların kısa ayrılığa ulaşma olasılığını belirler. Ölçeklerin bu ayrımı, tesir kesiti-
nin tam da (37) biçiminde çarpımlara ayrılabilmesinin nedenidir.

6. Maxwell–Boltzmann Ortalaması ve Gamow Zirvesi

(7) ile başlayarak v 'den E 'ye geçelim. (3) denklemin-
den

$$v = \left(\frac{2E}{\mu} \right)^{1/2}, \quad dv = \frac{dE}{(2\mu E)^{1/2}}. \quad (42)$$

(8) içine yerine koymak enerji dağılımını verir:

$$f_E(E) dE = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{E^{1/2}}{(kT)^{3/2}} \exp\left(-\frac{E}{kT}\right) dE. \quad (43)$$

Dolayısıyla

$$\langle \sigma v \rangle = \int_0^\infty \sigma(E) \left(\frac{2E}{\mu} \right)^{1/2} f_E(E) dE, \quad (44)$$

$$= \left(\frac{8}{\pi\mu} \right)^{1/2} \frac{1}{(kT)^{3/2}} \int_0^\infty \sigma(E) E e^{-E/kT} dE. \quad (45)$$

(37) kullanılarak

$$\langle \sigma v \rangle = \left(\frac{8}{\pi\mu} \right)^{1/2} \frac{1}{(kT)^{3/2}} \int_0^\infty S(E) e^{-\Phi(E)} dE, \quad (46)$$

elde edilir; burada

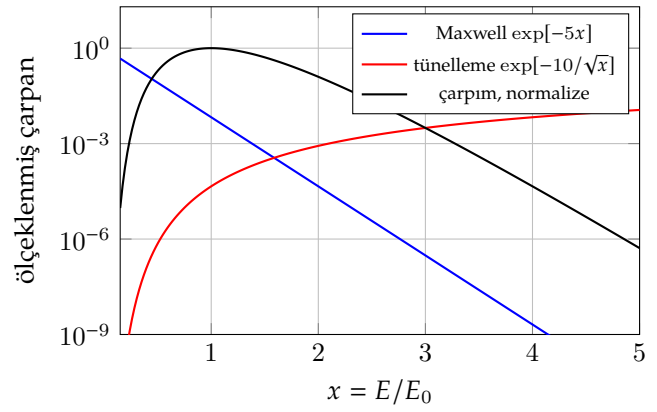
$$\Phi(E) = \frac{E}{kT} + \frac{b}{E^{1/2}}. \quad (47)$$

İntegrand, azalan Maxwell çarpımı ile artan tünelleme çarpımının çarpımıdır:

$$\exp[-\Phi(E)] = \exp\left(-\frac{E}{kT}\right) \exp\left(-\frac{b}{E^{1/2}}\right). \quad (48)$$

Maksimum şu koşulda oluşur:

$$\frac{d\Phi}{dE} = \frac{1}{kT} - \frac{b}{2E^{3/2}} = 0. \quad (49)$$



Şekil 2. Maxwell çarpımı ile tünelleme çarpımının çarpımından oluşan Gamow zirvesi. Örnekte $E_0/kT = 5$ kullanılmıştır; dolayısıyla $b/E_0^{1/2} = 10$ ve $\tau = 15$ 'tir. Çarpım $E = E_0$ 'da bire normalize edilmiştir.

E için çözüm Gamow zirvesi enerjisini verir:

$$E_0 = \left(\frac{bkT}{2} \right)^{2/3}. \quad (50)$$

Eyer noktasında

$$\frac{b}{E_0^{1/2}} = \frac{2E_0}{kT}. \quad (51)$$

Dolayısıyla zirvedeki üs

$$\Phi(E_0) = \frac{3E_0}{kT} \equiv \tau. \quad (52)$$

olur. Boyutsuz τ niceliği çoğu kez Gamow üssü olarak adlandırılır.

Eyer noktasındaki eğrilik

$$\Phi''(E) = \frac{3b}{4E^{5/2}}. \quad (53)$$

şeklindedir. (51) kullanılarak

$$\Phi''(E_0) = \frac{3}{2E_0 kT}. \quad (54)$$

bulunur. İkinci dereceden açılım

$$\Phi(E) \simeq \tau + \frac{1}{2} \Phi''(E_0) (E - E_0)^2. \quad (55)$$

şeklindedir. Geleneksel olarak

$$\exp[-\Phi(E)] \simeq \exp(-\tau) \exp\left[-\frac{4(E - E_0)^2}{\Delta^2}\right]. \quad (56)$$

yazılır. (55) ile karşılaştırma

$$\Delta = 4 \left(\frac{E_0 kT}{3} \right)^{1/2}. \quad (57)$$

sonucunu verir.

$S(E)$ sabit yaklaşıklarırsa, Gauss integrali

$$\langle \sigma v \rangle \simeq \left(\frac{8}{\pi\mu} \right)^{1/2} \frac{S(E_0)}{(kT)^{3/2}} e^{-\tau} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-4(E - E_0)^2 / \Delta^2} dE, \quad (58)$$

$$= \left(\frac{8}{\pi\mu} \right)^{1/2} \frac{S(E_0)}{(kT)^{3/2}} e^{-\tau} \frac{\sqrt{\pi}}{2} \Delta. \quad (59)$$

verir. (57) kullanılarak

$$\langle \sigma v \rangle \simeq \left(\frac{32}{3\mu} \right)^{1/2} \frac{S(E_0)E_0^{1/2}}{kT} e^{-\tau}. \quad (60)$$

elde edilir. Bu özlü ifade, rezonanssız termonükleer reaksiyon kuramının analitik özüdür. Baskın sıcaklık bağımlılığı $\tau = 3E_0/kT$ içinde yer alırken, $E_0 \propto T^{2/3}$ daha zayıf bir kuvvet-yasası çarpanına katkıda bulunur.

7. Sıcaklık Duyarlılığı

Yavaş değişen S' 'ye sahip rezonanssız bir reaksiyon için (60) denklemi

$$\langle \sigma v \rangle \propto T^{-1} E_0^{1/2} e^{-\tau}. \quad (61)$$

anlamına gelir.

$$E_0 \propto T^{2/3}, \quad (62)$$

olduğundan

$$T^{-1} E_0^{1/2} \propto T^{-2/3}. \quad (63)$$

Ayrıca,

$$\tau = \frac{3E_0}{kT} \propto T^{-1/3}. \quad (64)$$

Yerel sıcaklık üssü

$$\nu = \frac{d \ln \langle \sigma v \rangle}{d \ln T}. \quad (65)$$

olarak tanımlansın. (61)'in logaritması alınırsa

$$\ln \langle \sigma v \rangle = \text{const} - \frac{2}{3} \ln T - \tau. \quad (66)$$

olur.

$$\frac{d\tau}{d \ln T} = -\frac{\tau}{3}, \quad (67)$$

olduğundan

$$\nu = -\frac{2}{3} + \frac{\tau}{3} = \frac{\tau - 2}{3}. \quad (68)$$

elde ederiz.

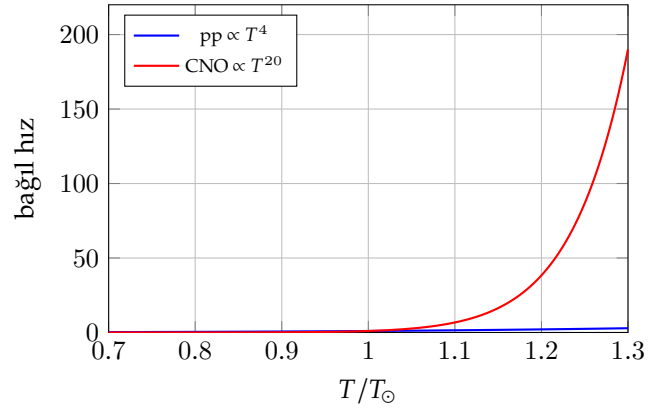
Bu üs, sıcaklık bağımlılığının yüklü-parçacık kısmını betimler. Gerçekçi yıldız modellerinde ek bileşim, perdeleme, dallanma ve zayıf-etkileşim çarpanları etkin üssü değiştirir. Güneş çekirdeği koşullarına yakın yerlerde pp-zinciri ışınlılık üretimi çoğu kez

$$\epsilon_{pp} \propto \rho X^2 T^4, \quad (69)$$

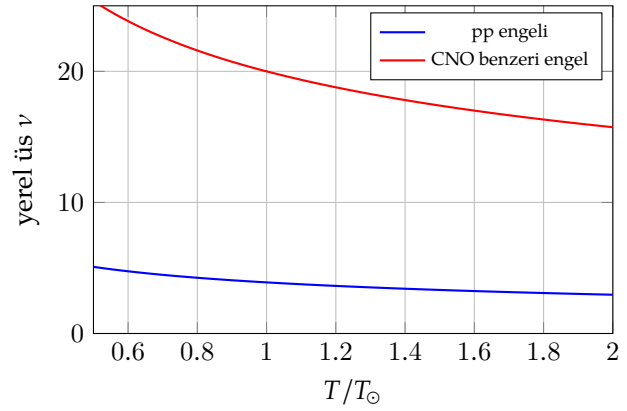
şeklinde yaklaşık edilirken, CNO çevrimi kabaca

$$\epsilon_{CNO} \propto \rho X X_{CNO} T^{20}. \quad (70)$$

gibi davranır. Bu karşıtlık fiziksel olarak belirleyicidir. pp zinciri ısı olarak yumuşaktır ve Güneş kütleli yıldızlarda geniş, kararlı yanma çekirdeklerine izin verir. CNO çevrimi çok daha merkezî yoğunlaşmıştır ve daha



Şekil 3. Güneş çekirdeği koşulları yakınında yerel kuvvet-yasası sıcaklık duyarlılıkları. Mütevazı bir 10% sıcaklık artışı T^4 pp hızını 1.46 çarpanı kadar, fakat T^{20} CNO hızını 6.7 çarpanı kadar değiştirir.



Şekil 4. Rezonanssız eyer ifadesinden sıcaklığa bağlı logaritmik eğimler. pp eğrisi $\tau_{\odot} = 13.7$ kullanırken, CNO benzeri eğri daha büyük bir Coulomb üssünü gösterir.

sıcak, daha büyük kütleli anakol yıldızlarında baskın olur.

Daha diferansiyel bir bakış, hızı sabit bir kuvvet yasasıyla değiştirmek yerine Gamow üssünün $T^{-1/3}$ bağımlılığını koruyarak elde edilir. $\tau_{\odot}$, başvuru Güneş sıcaklığı $T_{\odot}$ 'daki değeri gösteriyorsa,

$$\tau(T) = \tau_{\odot} \left(\frac{T}{T_{\odot}} \right)^{-1/3}. \quad (71)$$

Karşılık gelen yerel logaritmik eğim

$$\nu(T) = -\frac{2}{3} + \frac{\tau_{\odot}}{3} \left(\frac{T}{T_{\odot}} \right)^{-1/3}. \quad (72)$$

şeklinde. Böylece tek bir kuvvet yasası gerçek rezonanssız hızın yalnızca yerel teğetidir. Bu ayrım Güneş çekirdeğindeki dar sıcaklık aralığında küçüktür, fakat düşük kütleli yıldızları, Güneş modellerini ve daha sıcak CNO-baskın yıldızları karşılaştırırken önemlidir.

8. Eyer-Noktası Hızına İnceltmeler

(60) türetimi baskın üstel fiziği yalıtır. Bununla birlikte duyarlı Güneş çalışmaları birkaç küçük fakat kavram-

sal olarak önemli düzeltme gerektirir. İlki, Gamow penceresi boyunca $S(E)$ 'nin değişimidir. Boyutsuz logaritmik eğim

$$s_1 = \left. \frac{d \ln S}{dE} \right|_{E_0}. \quad (73)$$

olarak tanımlansın. Simetrik bir Gauss penceresi boyunca $E - E_0$ 'da doğrusal terim sıfıra integre olur, ancak etkin eyeri az miktarda kaydırır. Birinci mertebede kaymış maksimum

$$\Phi'(E_*) = s_1. \quad (74)$$

koşulunu sağlar. E_0 etrafında açılım

$$E_* - E_0 \simeq \frac{s_1}{\Phi''(E_0)} = \frac{2E_0 kT}{3} s_1. \quad (75)$$

verir. pp füzyonu için E_0 yalnızca birkaç keV'dir ve $S(E)$ nükleer enerji ölçeklerinde değişir; dolayısıyla (75) çok küçüktür.

İkinci düzeltme plazma perdelemesidir. Zayıf bağlı bir plazmada elektrostatik korelasyonlar giriş-kanalı enerjisini yaklaşık olarak orijindeki perdelenmiş potansiyel enerjiye eşit bir miktar düşürür. Debye uzunluğu

$$\lambda_D = \left[\frac{kT}{4\pi e^2 \sum_j n_j Z_j^2} \right]^{1/2}, \quad (76)$$

olup toplam, uygun ısısal yanıtla yüklü plazma türlerini içerir. Reaktanlar 1 ve 2 için zayıf-perdeleme enerjisi

$$U_e \simeq \frac{Z_1 Z_2 e^2}{\lambda_D}. \quad (77)$$

şeklinde. $U_e \ll kT$ ise, ısısal ortalamalı hız Salpeter çarpmanı ile çarpılır:

$$f_{sc} \simeq \exp\left(\frac{U_e}{kT}\right). \quad (78)$$

Bu düzeltme Güneş'te mütevazıdır, ancak tüm yüklü parçacık hızları üzerinde tutarlı bir etkiye sahiptir.

Üçüncü bir inceltme bazı kolların elektron-yakalama doğasıdır. ${}^7\text{Be}$ 'nin elektron yakalama ile yok edilme hızı iki-iyon termonükleer hızı değildir. Kullanışlı şematik bir biçim

$$F_{7e} = \lambda_{7e} Y_7, \quad (79)$$

olup λ_{7e} elektron yoğunluğuna, sıcaklığa, iyonlaşma durumuna ve sürekli elektron dalga fonksiyonlarına bağlıdır. ppII ve ppIII arasındaki kol rekabeti bu nedenle

$$\frac{F_{7p}}{F_{7e}} = \frac{\rho N_A Y_p \langle \sigma v \rangle_{7p}}{\lambda_{7e}}. \quad (80)$$

oranıyla yönetilir. Bu oran sıcaklıkla artar; çünkü proton yakalama yüklü-parçacık sürecidir, elektron yakalamanın sıcaklık bağımlılığı ise çok daha zayıftır.

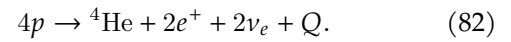
Son olarak, yıldız yapısı yanıtı yerel nükleer hızları küresel gözlenebilirlerle bağlar. Işınlılık kısıtı

$$L_\odot = \int_0^{M_\odot} \epsilon(m) dm, \quad (81)$$

gerektirir; dolayısıyla bir hızdaki pertürbasyon sıcaklık profilindeki küçük değişimlerle kısmen dengelenir. Toplam pp nötrino akısının, daha sıcaklığa duyarlı ${}^8\text{B}$ akısına kıyasla Güneş ışınlılığı tarafından daha sıkı kısıtlanmasının nedeni bu öz-düzenlemedir.

9. Proton-Proton Zincirinin Reaksiyon Kinetiği

pp zinciri dört protonu bir alfa parçacığına dönüştürür:



Atomik kütle farkı

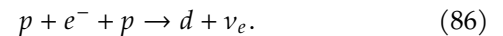
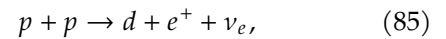
$$Q_{\text{tot}} = 26.73 \text{ MeV}. \quad (83)$$

verir. Ancak nötrinolar Güneş'ten esasen serbestçe kaçar; bu nedenle bırakılan ısısal enerji

$$Q_{\text{heat}} = 26.73 \text{ MeV} - \langle E_\nu \rangle_{\text{pair}}. \quad (84)$$

olur. Ortalama nötrino kaybı kola bağlıdır; çünkü pp, pep, ${}^7\text{Be}$ ve ${}^8\text{B}$ nötrinoları farklı tayflara sahiptir.

Başlıca reaksiyonlar Tablo 1'de listelenmiştir. Başlatıcı adım pp ya da pep'tir:



pep reaksiyonu çok daha seyrek, ancak monoenerjetik nötrinolar üretir.

$Y_i = n_i/(\rho N_A)$ baryonik kütle birimi başına bolluk olsun; burada N_A Avogadro sayısıdır. Farklı türler arasındaki iki-cisim reaksiyonları için hız katsayıları

$$\lambda_{ij} = \rho N_A \langle \sigma v \rangle_{ij} \quad (87)$$

olarak tanımlansın. Özdeş türler için kütle başına reaksiyon akışı

$$F_{ii} = \frac{1}{2} \rho N_A Y_i^2 \langle \sigma v \rangle_{ii}. \quad (88)$$

Farklı türler için ise

$$F_{ij} = \rho N_A Y_i Y_j \langle \sigma v \rangle_{ij}. \quad (89)$$

$p, d, {}^3\text{He}, {}^4\text{He}, {}^7\text{Be}$ ve ${}^7\text{Li}$ için asgari bir pp ağı şematik bolluk denklemlerine sahiptir:

$$\frac{dY_d}{dt} = F_{pp} + F_{pep} - F_{dp}, \quad (90)$$

$$\frac{dY_3}{dt} = F_{dp} - 2F_{33} - F_{34}, \quad (91)$$

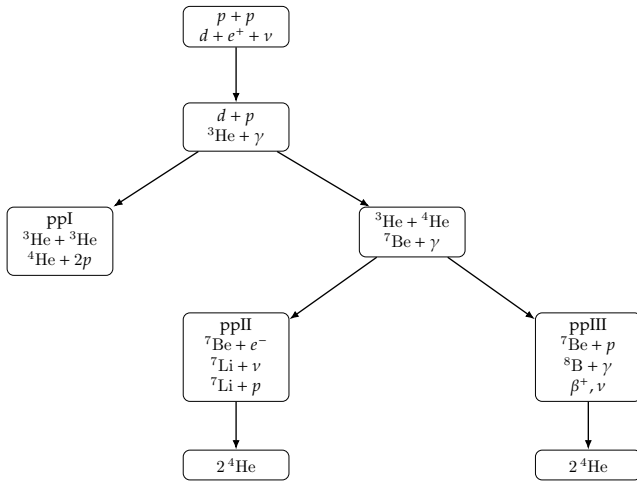
$$\frac{dY_4}{dt} = F_{33} + 2F_{7\text{Li}p} + 2F_{8\text{Be}}, \quad (92)$$

$$\frac{dY_7}{dt} = F_{34} - F_{7e} - F_{7p}, \quad (93)$$

$$\frac{dY_{7\text{Li}}}{dt} = F_{7e} - F_{7\text{Li}p}. \quad (94)$$

Tablo 1. Başlıca pp-zinciri reaksiyonları ve temsili Q değerleri. Enerjiler toplam reaksiyon Q değerleridir; nötrino enerjisi ısı olarak tamamen bırakılmaz.

Reaksiyon	Kol veya rol	Q değeri
$p + p \rightarrow d + e^+ + \nu_e$	başlatma	0.420 MeV
$p + e^- + p \rightarrow d + \nu_e$	pep başlatma	1.442 MeV
$d + p \rightarrow {}^3\text{He} + \gamma$	döteryum yanması	5.493 MeV
${}^3\text{He} + {}^3\text{He} \rightarrow {}^4\text{He} + 2p$	ppI	12.860 MeV
${}^3\text{He} + {}^4\text{He} \rightarrow {}^7\text{Be} + \gamma$	ppII/ppIII girişi	1.586 MeV
${}^7\text{Be} + e^- \rightarrow {}^7\text{Li} + \nu_e$	ppII	0.862 MeV çizgisi baskın
${}^7\text{Li} + p \rightarrow 2 {}^4\text{He}$	ppII tamamlanması	17.347 MeV
${}^7\text{Be} + p \rightarrow {}^8\text{B} + \gamma$	ppIII girişi	0.137 MeV
${}^8\text{B} \rightarrow {}^8\text{Be}^* + e^+ + \nu_e$	ppIII nötrino kaynağı	uç nokta 14 MeV yakınında
${}^8\text{Be}^* \rightarrow 2 {}^4\text{He}$	ppIII tamamlanması	ani parçalanma

**Şekil 5.** Üç pp-zinciri kolunun akış şeması. ppI kolu ${}^3\text{He} + {}^3\text{He}$ üzerinden sonlanırken, ppII ve ppIII ${}^7\text{Be}$ üzerinden ilerler. ppIII kolu Güneş'te seyrek, ancak yüksek enerjili ${}^8\text{B}$ nötrinoları üretir.

Burada F_{pp} zayıf pp reaksiyonunu içerir, F_{dp} $d + p$ 'yi, F_{33} ${}^3\text{He} + {}^3\text{He}$ 'yi, F_{34} ise ${}^3\text{He} + {}^4\text{He}$ 'yi gösterir. ppIII yolu F_{7p} 'yi, ardından ${}^8\text{B}$ beta bozunmasını ve ${}^8\text{Be}$ parçalanmasını gerektirir; bu son adımlar hızlı olduğundan çoğu kez cebirsel olarak elenebilir.

Döteryum bolluğu hızla dengeye ulaşır; çünkü döteryum oluşur oluşmaz $d + p$ ile elektromanyetik olarak yok edilir. (90) sıfıra eşitlenirse

$$F_{dp} \simeq F_{pp} + F_{pep}. \quad (95)$$

elde edilir. Karşılık gelen döteryum denge bolluğu

$$Y_d \simeq \frac{F_{pp} + F_{pep}}{\rho N_A Y_p \langle \sigma v \rangle_{dp}}. \quad (96)$$

şeklindedir. Dengeye gelme zamanı yaklaşık olarak

$$t_d \simeq (\rho N_A Y_p \langle \sigma v \rangle_{dp})^{-1}. \quad (97)$$

Güneş çekirdeğinde bu, kesin yerel koşullara bağlı olarak saniyelerden yıllara kadar mertebededir, fakat her zaman yıldız evrimi zamanlarına kıyasla ihmal edilebilir.

${}^3\text{He}$ bolluğu daha yavaş dengelenir. (91) sıfıra eşitlenirse

$$F_{dp} = 2F_{33} + F_{34}. \quad (98)$$

elde edilir. ppI baskın ve dolayısıyla $F_{34} \ll F_{33}$ ise,

$$F_{33} \simeq \frac{1}{2} F_{dp} \simeq \frac{1}{2} F_{pp}. \quad (99)$$

(88) kullanılarak

$$\frac{1}{2} \rho N_A Y_3^2 \langle \sigma v \rangle_{33} \simeq \frac{1}{2} F_{pp}. \quad (100)$$

bulunur. Dolayısıyla

$$Y_3 \simeq \left[\frac{F_{pp}}{\rho N_A \langle \sigma v \rangle_{33}} \right]^{1/2}. \quad (101)$$

${}^3\text{He}$ dengeye gelme zamanı döteryum zamanından çok daha uzundur; Güneş koşullarında tipik olarak milyonlarca yıldır. Bu, çekirdeğin büyük bölümünde Güneş yaşına kıyasla hâlâ kısadır, fakat dış pp-yanma bölgesinin her yerinde böyle değildir.

${}^3\text{He}$ gevşeme zamanının kullanışlı doğrusal bir tahmini, (91) denklemini denge etrafında pertürbe ederek elde edilir. F_{34} ihmal edilir ve F_{pp} sabit kabul edilirse,

$$\frac{dY_3}{dt} \simeq F_{pp} - \rho N_A Y_3^2 \langle \sigma v \rangle_{33}. \quad (102)$$

$Y_3 = Y_{3,\text{eq}} + \delta Y_3$ yazılırsa

$$\frac{d\delta Y_3}{dt} \simeq -\frac{\delta Y_3}{t_3}, \quad (103)$$

elde edilir; burada

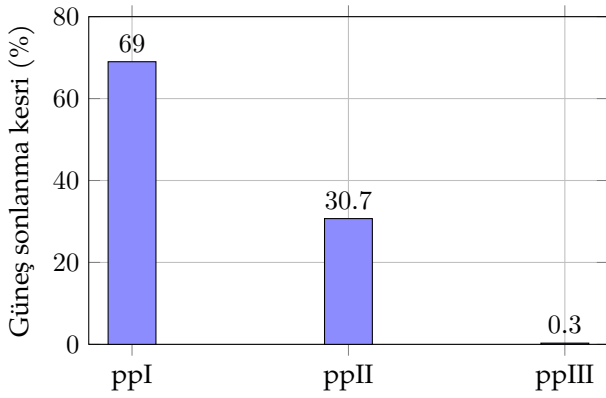
$$t_3 = [2\rho N_A Y_{3,\text{eq}} \langle \sigma v \rangle_{33}]^{-1}. \quad (104)$$

Bu zaman ölçeği önemlidir; çünkü bir Güneş modelinin ${}^3\text{He}$ bolluk profilinde anakol öncesi nükleer geçmişini ne kadar hızlı unuttuğunu denetler.

10. Kollar, Enerjetik ve Nötrinolar

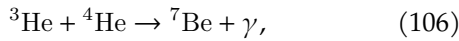
Üç kol ${}^3\text{He}$ 'nin akıbetiyle ayırt edilir. ppI'de

$${}^3\text{He} + {}^3\text{He} \rightarrow {}^4\text{He} + 2p. \quad (105)$$

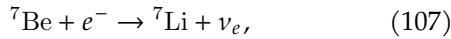


Şekil 6. Temsili Güneş pp-zinciri kol kesirleri. ppI kolu baskındır, ppII kayda değerdir ve ppIII seyrek; ancak yüksek enerjili ^8B nötrino yayını üretir.

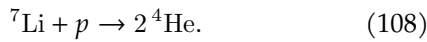
ppII'de ^3He bir alfa parçacığı yakalar:



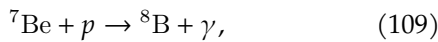
ardından elektron yakalama gelir,



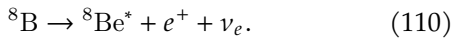
ve proton yakalama gerçekleşir:



ppIII'te ise ^7Be bunun yerine bir proton yakalar:



ve ^8B beta bozunmasına uğrar:



Uyarılmış ^8Be hızla parçalanır:



Günümüz Güneş'inde standart Güneş modelleri yaklaşık olarak

$$f_{\text{ppI}} \approx 0.69, \quad (112)$$

ve

$$f_{\text{ppII}} + f_{\text{ppIII}} \approx 0.31, \quad (113)$$

verir; ppIII sonlanma sayısı bakımından ppII'den çok daha küçüktür. Yine de ppIII gözlemsel olarak kritiktir; çünkü su Cherenkov deneylerinde saptanabilen yüksek enerjili nötrinolar üretir.

Güneş nötrino yayını sürekli beta yayları ile neredeyse monoenerjetik çizgilerin toplamıdır. pp nötrinolarının sürekli uç noktası

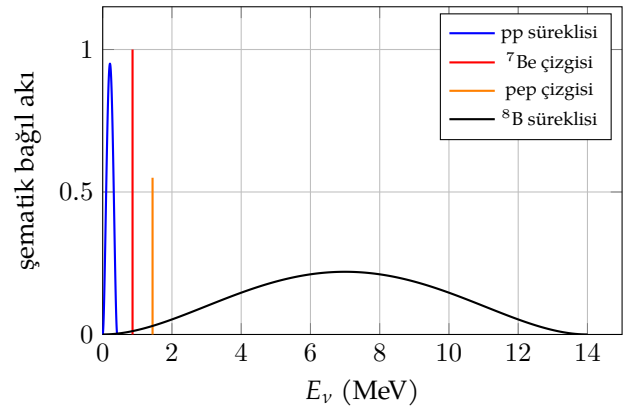
$$E_{\nu, \text{pp}}^{\text{max}} \approx 0.420 \text{ MeV}. \quad (114)$$

yakınındadır. pep nötrino çizgisi

$$E_{\nu, \text{pep}} \approx 1.44 \text{ MeV}. \quad (115)$$

değerindedir. Baskın ^7Be çizgisi

$$E_{\nu, ^7\text{Be}} \approx 0.862 \text{ MeV}, \quad (116)$$



Şekil 7. Şematik Güneş nötrino yayını. Dikey özellikler çizgi nötrinolarını temsil eder; sürekli eğriler görünürlik için normalleştirilmiş idealleştirilmiş beta yaylarını gösterir, gerçek akı büyüklüklerini değil.

olup 0.384 MeV yakınında daha zayıf bir çizgi vardır. ^8B sürekli yaklaşık

$$E_{\nu, ^8\text{B}}^{\text{max}} \approx 14 \text{ MeV}. \quad (117)$$

değerine kadar uzanır.

Güneş nötrino problemi, erken radyokimyasal ve su Cherenkov deneylerinin standart Güneş modellerinin öngördüğünden daha az elektron nötrinosu gözlemlenmesiyle ortaya çıkmıştır [9]. Çözüm nötrino çeşni dönüşümüdür. Sudbury Nötrino Gözlemevi yüklü-akım, yüksüz-akım ve elastik-saçılma kanallarını ölçmüş ve toplam etkin ^8B nötrino akısının Güneş modelleriyle uyumlu olduğunu, elektron-nötrino bileşeninin ise azaldığını göstermiştir [13, 14]. Dolayısıyla pp-zinciri kuramı temelden yanlış değildir; nötrinolar Güneş'te ve boşlukta yayılırken çeşni değiştirir.

11. Çalışılmış Sayısal Uygulamalar

pp füzyonu için $\mu \approx m_p/2$ 'dir. Enerji birimlerinde,

$$\mu c^2 \approx 469 \text{ MeV}. \quad (118)$$

Gamow enerjisi için yaygın kullanılan bir ifade

$$E_G = 2\mu c^2 (\pi\alpha Z_1 Z_2)^2, \quad (119)$$

şeklinindedir; burada $\alpha = e^2/\hbar c$ 'dir.

$$\frac{b}{E^{1/2}} = \left(\frac{E_G}{E} \right)^{1/2}, \quad (120)$$

olduğundan

$$b = E_G^{1/2}. \quad (121)$$

elde edilir. pp için,

$$E_G \approx 493 \text{ keV}. \quad (122)$$

$T = 1.5 \times 10^7 \text{ K}$ 'de $kT = 1.29 \text{ keV}$ 'dir. Denklem (50)

$$E_0 = \left[\frac{E_G^{1/2} kT}{2} \right]^{2/3}, \quad (123)$$

$$= \left[\frac{(493 \text{ keV})^{1/2} (1.29 \text{ keV})}{2} \right]^{2/3}, \quad (124)$$

$$\approx 5.9 \text{ keV}. \quad (125)$$

verir. Gamow üssü

$$\tau = \frac{3E_0}{kT} \approx \frac{3(5.9)}{1.29} \approx 13.7. \quad (126)$$

olur. Gauss genişliği

$$\Delta = 4 \left(\frac{E_0 kT}{3} \right)^{1/2}, \quad (127)$$

$$= 4 \left(\frac{5.9 \times 1.29}{3} \right)^{1/2} \text{ keV}, \quad (128)$$

$$\approx 6.4 \text{ keV}. \quad (129)$$

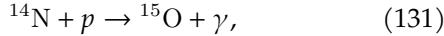
olur. Δ , E_0 ile karşılaştırılabilir olsa da, eyer yaklaşımı baskın üsteli yakalar ve iyi bir fiziksel sezgi sağlar.

(68) denkleminde yerel üs

$$\nu_{pp, \text{barrier}} \approx \frac{13.7 - 2}{3} \approx 3.9. \quad (130)$$

şeklinde. Bu, tanıdık Güneş modeli ölçeklenmesi $\epsilon_{pp} \propto T^4$ 'ü açıklar.

Karşılaştırma için, temsili bir CNO darboğaz reaksiyonu olarak



ele alalım; burada $Z_1 Z_2 = 7$ ve $\mu \approx 14m_p/15$ 'tir. Gamow enerjisi çok daha büyüktür:

$$E_G \propto \mu(Z_1 Z_2)^2. \quad (132)$$

Daha büyük Coulomb yükü E_0 ve τ 'yu yükseltir; bu da Güneş çekirdeği koşullarında

$$\nu_{\text{CNO}} \approx 18 - 22 \quad (133)$$

yakınında bir etkin üs verir. CNO yanmasının Güneş yakınında yaklaşık T^{20} gibi davrandığı ifadesinin analitik kökeni budur.

pp Gamow zirvesinde klasik dönüm noktasını da tahmin edebiliriz:

$$r_c = \frac{1.440 \text{ MeV fm}}{0.0059 \text{ MeV}} \approx 244 \text{ fm}. \quad (134)$$

Dolayısıyla çift nükleer ölçeğe ulaşmadan önce yüzlerce femtometre boyunca tüneller. 2 fm'de engel yüksekliği

$$V_C \approx 720 \text{ keV}, \quad (135)$$

olarak kalır; bu nedenle Gamow zirvesi

$$\frac{E_0}{V_C} \approx 8.2 \times 10^{-3}. \quad (136)$$

değerinde yer alır. Füzyon derin biçimde engel-altıdır.

Net Güneş ışınlılığı toplam helyum üretim hızını belirler.

$$1 \text{ MeV} = 1.602 \times 10^{-6} \text{ erg}, \quad (137)$$

olduğundan, brüt pp-zinciri enerji salımı

$$Q_{\text{tot}} = 26.73 \text{ MeV} = 4.28 \times 10^{-5} \text{ erg}. \quad (138)$$

olur. Mertebe tahmini için kola bağlı mütevazı nötrino çıkarımı ihmal edilirse, Güneş'i beslemek için saniye başına gereken tamamlanmış zincir sayısı

$$\dot{N}_\alpha \approx \frac{L_\odot}{Q_{\text{heat}}} \approx \frac{3.83 \times 10^{33}}{4.0 \times 10^{-5}} \approx 9.6 \times 10^{37} \text{ s}^{-1}. \quad (139)$$

şeklinde. Her tamamlanmış zincir dört proton tükettiğinden

$$\dot{N}_p \approx 3.8 \times 10^{38} \text{ s}^{-1}. \quad (140)$$

Karşılık gelen kütle dönüşüm hızı mertebe olarak

$$\dot{M} \approx 4m_p \dot{N}_\alpha \approx 6.4 \times 10^{14} \text{ g s}^{-1}, \quad (141)$$

iken, gerçek kütle-enerji kaybı hızı

$$\frac{L_\odot}{c^2} \approx 4.3 \times 10^{12} \text{ g s}^{-1}. \quad (142)$$

olur. Fark, durgun kütleinin yalnızca yaklaşık 0.7%'sinin enerjiye dönüştürülmesini yansıtır.

12. Ek Çalışılmış Örnek: Perdeleme ve Nötrino Akısı

Somut bir inceltme olarak zayıf-perdeleme artışını ve Güneş ışınlılığının ima ettiği nötrino akısını tahmin edelim. Temsili merkezî değerler

$$T_c = 1.55 \times 10^7 \text{ K}, \quad \rho_c = 150 \text{ g cm}^{-3}, \quad (143)$$

alınsın ve yaklaşık kütle kesirleri

$$X_c = 0.34, \quad Y_c = 0.64. \quad (144)$$

benimsensin. Proton ve helyum sayı yoğunlukları o hâlde

$$n_p \approx \frac{\rho_c X_c}{m_p}, \quad (145)$$

$$\approx \frac{150(0.34)}{1.673 \times 10^{-24}} \approx 3.0 \times 10^{25} \text{ cm}^{-3}, \quad (146)$$

$$n_\alpha \approx \frac{\rho_c Y_c}{4m_p} \approx 1.4 \times 10^{25} \text{ cm}^{-3}. \quad (147)$$

Tam iyonlaşmış hidrojen-helyum karışımı için yük-ağırlıklı yoğunluğun basit bir tahmini

$$\sum_j n_j Z_j^2 \approx n_e + n_p + 4n_\alpha. \quad (148)$$

şeklinde. Yük nötrlüğü

$$n_e = n_p + 2n_\alpha \approx 5.8 \times 10^{25} \text{ cm}^{-3}, \quad (149)$$

verdiğinden

$$\sum_j n_j Z_j^2 \approx 1.45 \times 10^{26} \text{ cm}^{-3}. \quad (150)$$

olur. (76) kullanılarak, $kT_c \approx 2.14 \times 10^{-9}$ erg ve $e^2 = 2.307 \times 10^{-19}$ erg cm ile,

$$\lambda_D \approx 7.1 \times 10^{-9} \text{ cm.} \quad (151)$$

elde edilir. Bu, nükleer boyutlardan çok daha büyüktür:

$$\frac{\lambda_D}{2 \text{ fm}} \approx 3.6 \times 10^4. \quad (152)$$

pp füzyonu için perdeleme enerjisi bu nedenle

$$U_e \approx \frac{e^2}{\lambda_D}, \quad (153)$$

$$\approx 3.25 \times 10^{-11} \text{ erg} \approx 20 \text{ eV.} \quad (154)$$

Artış

$$f_{sc} \approx \exp\left(\frac{20 \text{ eV}}{1.34 \times 10^3 \text{ eV}}\right) \approx 1.015. \quad (155)$$

olur. Böylece bu basit tahminde zayıf perdeleme pp hızını yalnızca yaklaşık 1.5% değiştirir; ancak kesin Güneş modeli düzeltmesi yerel bileşime ve termodinamik işleme bağlıdır.

Işınlılık kısıtı ayrıca basit bir nötrino sayımı verir. Her tamamlanmış pp zinciri iki nötrino ürettiğinden, (139)

$$\dot{N}_\nu \approx 2\dot{N}_\alpha \approx 1.9 \times 10^{38} \text{ s}^{-1}. \quad (156)$$

sonucunu ima eder. Bir astronomik birimde,

$$d_\oplus = 1.496 \times 10^{13} \text{ cm,} \quad (157)$$

ışınrlıkla kısıtlanan tüm-kol nötrino akısı yaklaşık

$$\Phi_{\nu,\oplus} \approx \frac{\dot{N}_\nu}{4\pi d_\oplus^2}, \quad (158)$$

$$\approx \frac{1.9 \times 10^{38}}{4\pi(1.496 \times 10^{13})^2}, \quad (159)$$

$$\approx 6.8 \times 10^{10} \text{ cm}^{-2} \text{ s}^{-1}. \quad (160)$$

olur. Bu sayı standart Güneş pp-nötrino akısının ölçeğine yakındır. Uyum rastlantısal değildir: düşük enerjili pp nötrinoları, kol ayrıntılarına yalnızca mütevazı bağımlılıkla, enerji korunumu yoluyla gözlenen foton ışınlılığına bağlıdır.

Son bir birim denetimi olarak, Dünya'da gözlenen foton ışınlılığı bir Güneş sabitine karşılık gelir:

$$F_\odot = \frac{L_\odot}{4\pi d_\oplus^2} \approx 1.36 \times 10^6 \text{ erg cm}^{-2} \text{ s}^{-1}. \quad (161)$$

Bunu nötrino sayı akısına bölmek

$$\frac{F_\odot}{\Phi_{\nu,\oplus}} \approx 2.0 \times 10^{-5} \text{ erg} \approx 12.5 \text{ MeV,} \quad (162)$$

enerji ölçeğini verir; bu, yapılan yaklaşımlar dâhilinde yayılan nötrino başına beklenen foton enerjisiyle uyumludur. Bu, nükleer enerjeliği, Güneş ışınlılığını ve nötrino astronomisini birbirine bağlayan özlü bir tutarlılık denetimi sağlar.

13. Uzantılar, Genelleştirmeler ve Gözlemsel Sınamalar

Gamow-zirvesi yöntemi pp füzyonunun çok ötesine uygulanır. Herhangi bir rezonanssız yüklü-parçacık reaksiyonu için

$$Z_1 Z_2 \rightarrow Z_i Z_j, \quad \mu \rightarrow \mu_{ij} \quad (163)$$

değişimleri karşılık gelen Coulomb ölçeğini verir. Kullanışlı biçimde,

$$E_{G,ij} = 2\mu_{ij}c^2(\pi\alpha Z_i Z_j)^2, \quad (164)$$

ve eyer enerjisi

$$E_{0,ij} = \left[\frac{(E_{G,ij})^{1/2} kT}{2} \right]^{2/3}. \quad (165)$$

olarak yazılabilir. Bu ifade ardışık yanma evrelerinin neden daha yüksek sıcaklıklar gerektirdiğini açıklar: daha büyük yükler, ısı enerji artsa bile Coulomb üssünü büyütür.

Kullanışlı bir örnek helyum yanmasıdır. Üç-alfa süreci basit iki-cisim rezonanssız bir reaksiyon değildir; kararsız ^8Be rezonansı ve ^{12}C içindeki Hoyle durumu üzerinden ilerler. Yine de Maxwell baskılanması ile Coulomb nüfuzu arasındaki aynı rekabet giriş kanallarını denetler. Rezonanslar integrali, yavaş değişen $S(E)$ varsayımını keskin tepe yapan bir nükleer çarpma ile değiştirerek modifiye eder. E_r 'de dar bir rezonans için hız, rezonanssız Gamow eyeri yerine Boltzmann çarpmanı tarafından denetlenir:

$$\langle \sigma v \rangle_r \propto T^{-3/2} \exp\left(-\frac{E_r}{kT}\right), \quad (166)$$

Dolayısıyla pp zinciri en temiz durumdur, en genel durum değil.

pp zinciri birkaç tamamlayıcı yolla gözlemsel olarak sınanabilir. Birincisi, helyosismoloji Güneş akustik salınımları yoluyla ses hızını

$$c_s^2 \approx \frac{\Gamma_1 P}{\rho} \quad (167)$$

ölçer. Basınç ve yoğunluk profilleri sıcaklık profiline ve bileşime bağlı olduğundan, helyosismoloji nükleer reaksiyon hızlarını da öngören Güneş modellerini güçlü biçimde kısıtlar.

İkincisi, Güneş nötrino deneyleri tek tek kolları gözler. Düşük enerjili pp nötrinoları ışınlılık kısıtını ve zayıf pp matris elemanını sınar. ^7Be çizgisi ppII kolunu, ^8B sürekli ise çekirdeğin yüksek-sıcaklık kuyruğunu sınar. Şematik bir duyarlılık hiyerarşisi

$$\Phi_{pp} \sim T_c^{-1}, \quad \Phi_{7\text{Be}} \sim T_c^{10}, \quad \Phi_{8\text{B}} \sim T_c^{20-25}, \quad (168)$$

şeklinde; burada Φ_{pp} için negatif üs yerel pp reaksiyon yasasından ziyade ışınlılık kısıtını yansıtır. Borexino düşük enerjide pp-zinciri nötrinolarını ölçmüş, SNO

ise ^8B nötrinoları için etkin-çeşni toplamını ortaya koymuştur [13, 14, 16].

Üçüncüsü, Güneş bileşimi problemi astrofiziksel bir stres sınaması sağlar. Modern tayfsal bolluk belirlemeleri çıkarılan ağır-element bolluğunu düşürmüş, opaklıkları ve Güneş modellerinin gerektirdiği çekirdek sıcaklığını değiştirmiştir [15]. (168) küçük ısıl değişimleri büyük ^8B akı değişimlerine büyüttüğü için, nötrino verileri opaklık, bolluk ve karışım varsayımları arasında ayırım yapmaya yardımcı olur.

Son olarak pp zinciri, yıldız popülasyonlarıyla ilgili daha geniş bir ilkeyi gösterir. Düşük kütleli anakol yıldızları hidrojeni çoğunlukla pp zinciriyle yakar ve kütleyle bağlı olarak ışımsal çekirdekler ya da derin konvektif zarflar geliştirir. Daha büyük kütleli yıldızlar, daha sıcak merkezleriyle, esas olarak CNO çevrimiyle yanar ve ışımlılık üretimleri yoğunlaşmış olduğundan çoğu kez konvektif çekirdeklere sahiptir. Mikroskobik Coulomb üssü bu nedenle Hertzprung–Russell diyagramı boyunca makroskobik yıldız yapısını etkiler.

14. Tartışma

Yukarıdaki analitik inceleme kontrollü yaklaşımlara dayanır. İlk olarak WKB türetimi, keskin tanımlı bir nükleer yarıçapın dışında saf Coulomb potansiyeli varsayar. Gerçek nükleer potansiyeller sonlu menzile, spin bağımlılığına, değiş-tokuş etkilerine ve kanal bağlaşımlarına sahiptir. Bunlar tesir kesitinin yavaş değişen kısmını değiştirir ve dolayısıyla $S(E)$ içine dâhil edilir. Üstel Coulomb çarpanı sağlam kalır; çünkü esas olarak nükleer ölçekten çok daha büyük yarıçaplarda üretilir.

İkincisi, Maxwell–Boltzmann ortalaması dejenere olmayan ısı iyon dağılımı varsayar. Güneş çekirdeğinde bu iyi gerekçelendirilmiştir. Kompakt cisimlerde ya da yoğun geç-evre yanma ortamlarında dejenereasyon, güçlü perdeleme ve piknonükleer etkiler basit ısıl formülasyonu geçersiz kılabilir.

Üçüncüsü, Gauss yaklaşımı yeterince dar bir Gamow penceresi ve yavaş değişen $S(E)$ varsayar. Bu, kesin olmaktan ziyade asimptotiktir. Dar rezonanslar, eşikler ya da kuyrukları reaksiyon hızına baskın olan eşik-altı durumlar yakınında başarısız olur. Bu durumlarda tam integral (46), deneysel ya da kuramsal olarak belirlenmiş $S(E)$ ile hesaplanmalıdır.

Dördüncüsü, plazma perdelemesi Coulomb engelini değiştirir. Zayıf perdelemede hız yaklaşık olarak

$$f_{sc} \simeq \exp\left(\frac{U_e}{kT}\right), \quad (169)$$

ile çarpılır; burada U_e elektrostatik perdeleme enerjisidir. Salpeter'in zayıf-perdeleme kuramı standart ilk düzeltmeyi sağlar [6]. Güneş'te perdeleme pp hızlarını yalnızca birkaç yüzde değiştirir, ancak duyarlı Güneş-nötrino öngörülerini bunu içermelidir.

Zayıf-etkileşim darboğazı vurgulanmayı hak eder. İlk pp reaksiyonu güçlü etkileşim tarafından yönetilseydi, Güneş ışımlılığı ve ömrü kökten farklı olurdu. Bu-

nun yerine pp reaksiyon hızı küçüktür; çünkü kısa tünelleme karşılaşması içinde beta dönüşümü gerektirir. Döteryum reaksiyonu $d + p \rightarrow ^3\text{He} + \gamma$ elektromanyetik ve bu nedenle döteryum var olur olmaz hızlıdır. Zaman ölçeklerinin bu ayrımı küçük denge döteryum bolluğunu yaratır ve hidrojen yanmasını kararlı kılar.

pp-zinciri kol kesirleri sıcaklığa bağlıdır. Artan sıcaklık $^3\text{He} + ^3\text{He}'$ ye göre $^3\text{He} + ^4\text{He}'$ yi ve ayrıca elektron yalamaya göre $^7\text{Be} + p'$ yi destekler. Sonuç olarak daha sıcak Güneş modelleri daha fazla ^8B nötrinosu üretir. Bu, tarihsel Güneş nötrino problemini özellikle keskin kılmıştır: yüksek enerjili ^8B akısı Güneş çekirdeğinin duyarlı bir termometresidir.

SNO tarafından çözüm, hem yıldız nükleer fiziğinin hem de minimalin ötesindeki nötrino fiziğinin en temiz doğrulamalarından biridir. Yüklü-akım reaksiyonları öncelikle ν_e 'yi ölçerken, yüksüz-akım reaksiyonları tüm etkin çeşnileri ölçmüştür. Gözlenen toplam etkin akı standart Güneş modeli beklentileriyle uyumlu iken, elektron bileşeni azalmıştır [13, 14]. Maddeyle güçlenen Mikheyev–Smirnov–Wolfenstein çeşni dönüşümü ve boşluk karışımı artık standart yorumu oluşturur.

pp zinciri ayrıca mikroskobik üstel duyarlılığın makroskobik yıldız öz-düzenlemesiyle nasıl birlikte var olduğunu gösterir. Sıcaklıktaki yerel bir artış nükleer enerji üretim hızını yükselterek hidrostatik bir yıldızda genleşme ve soğumaya neden olur. pp yanmasının görece yumuşak T^4 bağımlılığı Güneş kütleli yıldızları kararlı ve uzun ömürlü kılar. Buna karşılık CNO yanmasının dik sıcaklık bağımlılığı daha merkezî yoğunlaşmış ışımlılık üretir ve daha büyük kütleli anakol yıldızlarında konvektif çekirdeklere katkıda bulunur.

15. Sonuç

Nükleer uzaklıklarda iki proton için Coulomb engeli yaklaşık 0.7 MeV iken, Güneş çekirdeği ısı enerjisi yalnızca yaklaşık 1.3 keV'dir. Bu nedenle Güneş'te klasik füzyon imkânsızdır. WKB yaklaşımı kuantum nüfuz etme çarpanını $\exp(-2\pi\eta) = \exp(-b/E^{1/2})$ olarak verir; burada Gauss birimlerinde $b = \pi\sqrt{2\mu}Z_1Z_2e^2/\hbar$ 'dir. Bu evrensel engel bağımlılığını tesir kesitinden ayırmak astrofiziksel S-çarpanını tanımlar.

Maxwellci bir plazma üzerinde ısıl ortalama Gamow zirvesini üretir. $E/kT + b/E^{1/2}$ üssü $E_0 = (bkT/2)^{2/3}$ 'te bir eyere ve $\Delta = 4(E_0kT/3)^{1/2}$ genişliğe sahiptir. Ortaya çıkan hızın yerel sıcaklık üssü $\tau = 3E_0/kT$ ile $\nu = (\tau - 2)/3$ 'tür. Güneş koşullarına yakın pp yanması için bu $\nu \simeq 4$ verirken, CNO reaksiyonlarının daha büyük yükleri 20 yakınında üslere yol açar.

pp zinciri yalnızca tünelleme tarafından değil, zayıf etkileşim fiziği tarafından da denetlenir. Başlatıcı reaksiyon $p + p \rightarrow d + e^+ + \nu_e$, Güneş'in uzun ömrüne izin veren darboğazdır. Döteryum hızla dengelenir, ^3He daha yavaş dengelenir ve ppI, ppII ve ppIII arasındaki kol rekabeti nötrino üretimini belirler. Net enerji salımı, nötrino kayıplarından önce helyum çekirdeği başına 26.73 MeV'dir. Güneş nötrino ölçümleri, özellikle SNO'nun yüksüz-akım sonucu ve düşük enerjili pp-

zinciri gözlemleri, nötrino çeşni salınımlarını ortaya çıkarırken nükleer enerji kaynağını da doğrular.

A. Sonlu-Yarıçap Coulomb İntegrali

Bölüm 4'de kullanılan önde gelen WKB üssü alt sınır R/r_c 'yi sıfıra ayarlar. Sonlu bir nükleer yarıçapla tam Coulomb integrali yine de elementerdir.

$$x_R = \frac{R}{r_c} = \frac{RE}{a}. \quad (170)$$

tanımlansın. Boyutsuz integral

$$I(x_R) = \int_{x_R}^1 \sqrt{\frac{1-x}{x}} dx. \quad (171)$$

şeklinde. $x = \sin^2 \theta$ kullanılarak

$$I(x_R) = \int_{\theta_R}^{\pi/2} 2 \cos^2 \theta d\theta, \quad (172)$$

elde edilir; burada

$$\theta_R = \arcsin \sqrt{x_R}. \quad (173)$$

Dolayısıyla

$$I(x_R) = \frac{\pi}{2} - \theta_R - \frac{1}{2} \sin(2\theta_R). \quad (174)$$

$$\sin(2\theta_R) = 2\sqrt{x_R(1-x_R)}, \quad (175)$$

olduğundan üs

$$\mathcal{G}_R(E) = \frac{2\sqrt{2\mu}}{\hbar} r_c E^{1/2} I(x_R). \quad (176)$$

hâline gelir. Sıfır-yarıçap Gamow üssü

$$\mathcal{G}_0(E) = \frac{2\pi\eta}{1} = \frac{\pi a}{\hbar} \sqrt{\frac{2\mu}{E}}. \quad (177)$$

şeklinde. Böylece

$$\frac{\mathcal{G}_R}{\mathcal{G}_0} = \frac{2I(x_R)}{\pi}. \quad (178)$$

$x_R \ll 1$ için,

$$\theta_R \simeq x_R^{1/2} + \frac{x_R^{3/2}}{6}, \quad (179)$$

ve

$$\sqrt{x_R(1-x_R)} \simeq x_R^{1/2} - \frac{x_R^{3/2}}{2}. \quad (180)$$

(174) içine yerine koyma

$$I(x_R) \simeq \frac{\pi}{2} - 2x_R^{1/2} + \frac{x_R^{3/2}}{3}. \quad (181)$$

verir. Sonuç olarak,

$$\mathcal{G}_R \simeq \mathcal{G}_0 \left[1 - \frac{4}{\pi} x_R^{1/2} + \frac{2}{3\pi} x_R^{3/2} \right]. \quad (182)$$

pp füzyonu için Gamow zirvesinde $R/r_c \sim 2/244$ olduğundan, üsse karekök düzeltmesi biçimsel olarak yüzde on mertebesine yakındır. Uygulamada nükleer dalga fonksiyonuna tam eşleme ve $S(E)$ tanımı bu kısa-uzaklık duyarlılığını soğurur; Gamow çarpanında tutulan kısım evrensel, uzun-uzaklık Coulomb bağımlılığıdır.

B. Yavaş Değişen S-Çarpanından İlk Düzeltme

$$S(E) = S_0 \left[1 + s_1(E - E_0) + \frac{s_2}{2}(E - E_0)^2 \right], \quad (183)$$

olsun; burada s_1 ve s_2 E_0 'da değerlendirilir ve sırasıyla ters enerji ve ters enerji kare boyutlarına sahiptir. Gauss yaklaşımında

$$y = E - E_0, \quad A = \frac{4}{\Delta^2}. \quad (184)$$

tanımlansın. İlgili integral

$$\mathcal{I} = S_0 e^{-\tau} \int_{-\infty}^{\infty} \left(1 + s_1 y + \frac{s_2}{2} y^2 \right) e^{-Ay^2} dy. \quad (185)$$

şeklinde. Tek terim yok olur:

$$\int_{-\infty}^{\infty} y e^{-Ay^2} dy = 0. \quad (186)$$

Kalan Gauss momentleri

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-Ay^2} dy = \left(\frac{\pi}{A} \right)^{1/2}, \quad (187)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} y^2 e^{-Ay^2} dy = \frac{1}{2A} \left(\frac{\pi}{A} \right)^{1/2}. \quad (188)$$

olur. Dolayısıyla

$$\mathcal{I} = S_0 e^{-\tau} \left(\frac{\pi}{A} \right)^{1/2} \left[1 + \frac{s_2}{4A} \right]. \quad (189)$$

$A = 4/\Delta^2$ kullanılarak

$$\mathcal{I} = S_0 e^{-\tau} \frac{\sqrt{\pi}\Delta}{2} \left[1 + \frac{s_2\Delta^2}{16} \right]. \quad (190)$$

elde edilir. Bu sonuç, hafif eğimli bir $S(E)$ 'nin hızı yalnızca kesirsel Gamow-penceresi genişliğinde ikinci mertebeye etkilediğini gösterir. Sıfırdan farklı bir eğim s_1 , sonraki düzeyde (75) içindeki eyer yer değiştirmesi yoluyla önem kazanır, fakat sabit E_0 'da simetrik Gauss integrali yoluyla değil.

Kaynaklar

- [1] A. S. Eddington, *The Internal Constitution of the Stars*, Cambridge University Press, Cambridge, 1926.
- [2] G. Gamow, Zur Quantentheorie des Atomkernes, *Zeitschrift für Physik* **51**, 204–212 (1928).
- [3] R. d'E. Atkinson and F. G. Houtermans, Zur Frage der Aufbaumöglichkeit der Elemente in Sternen, *Zeitschrift für Physik* **54**, 656–665 (1929).
- [4] H. A. Bethe and C. L. Critchfield, The Formation of Deuterons by Proton Combination, *Physical Review* **54**, 248–254 (1938).

- [5] H. A. Bethe, Energy Production in Stars, *Physical Review* **55**, 434–456 (1939).
- [6] E. E. Salpeter, Electron Screening and Thermonuclear Reactions, *Australian Journal of Physics* **7**, 373–388 (1954).
- [7] W. A. Fowler, G. R. Caughlan, and B. A. Zimmerman, Thermonuclear Reaction Rates, *Annual Review of Astronomy and Astrophysics* **5**, 525–570 (1967).
- [8] D. D. Clayton, *Principles of Stellar Evolution and Nucleosynthesis*, University of Chicago Press, Chicago, 1983.
- [9] J. N. Bahcall, *Neutrino Astrophysics*, Cambridge University Press, Cambridge, 1989.
- [10] R. Kippenhahn, A. Weigert, and A. Weiss, *Stellar Structure and Evolution*, 2. baskı, Springer, Berlin, 2012.
- [11] B. W. Carroll and D. A. Ostlie, *An Introduction to Modern Astrophysics*, 2. baskı, Cambridge University Press, Cambridge, 2017.
- [12] E. G. Adelberger et al., Solar Fusion Cross Sections II: The pp Chain and CNO Cycles, *Reviews of Modern Physics* **83**, 195–245 (2011).
- [13] Q. R. Ahmad et al. (SNO Collaboration), Measurement of the Rate of $\nu_e + d \rightarrow p + p + e^-$ Interactions Produced by ^8B Solar Neutrinos at the Sudbury Neutrino Observatory, *Physical Review Letters* **87**, 071301 (2001).
- [14] Q. R. Ahmad et al. (SNO Collaboration), Direct Evidence for Neutrino Flavor Transformation from Neutral-Current Interactions in the Sudbury Neutrino Observatory, *Physical Review Letters* **89**, 011301 (2002).
- [15] A. Serenelli, Alive and Well: A Short Review about Standard Solar Models, *European Physical Journal A* **52**, 78 (2016).
- [16] M. Agostini et al. (Borexino Collaboration), Comprehensive Measurement of pp-Chain Solar Neutrinos, *Nature* **562**, 505–510 (2018).