



DEJENERE MADDE

Relativistik Elektron Dejenere Gaz Basıncı ve Chandrasekhar Kütle Sınırının Analitik Türetimi

Akademik Araştırma Makalesi

Teorik Astrofizik — Adım Adım Analitik Türetimler, Vektör Diyagramları ve Sayısal Tablolar

Relativistik Elektron Dejenere Gaz Basıncı ve Chandrasekhar Kütle Sınırının Analitik Türetimi

Dejenere Madde

Eylül 2026

Özet. Beyaz cüceler termal basınçla değil, soğuk, dejenere bir elektron gazının kuantum basıncıyla desteklenir. Bu nedenle maksimum kütleleri, Pauli dışarlama ilkesinin, özel göreliliğin ve Newtoncu özkütleçekimin en yalın makroskobik sonuçlarından biridir. Bu makale, elektron dejenerasyon hâl denkleminin ve Chandrasekhar kütle sınırının kendi içinde bütünlüklü bir türetimini sunar. Bir Fermi küresinde faz uzayı sayımından başlayarak Fermi momentumunu, tam sıfır-sıcaklık basınç integralini, bunun relativistik olmayan ve ultra-relativistik limitlerini ve Chandrasekhar'ın $x = p_F/(m_e c)$ relativite parametresi cinsinden kapalı hâl denklemini türetiyoruz. Daha sonra bu sonuçları hidrostatik denge ve Lane–Emden denklemi ile birleştiriyoruz. Relativistik olmayan $n = 3/2$ politropu beyaz cüce kütle–yarıçap yasasını $R \propto M^{-1/3}$ verirken, ultra-relativistik $n = 3$ politropu yarıçaptan bağımsız bir sınır kütle verir. Lane–Emden sabiti $\xi_1^2 |\theta'(\xi_1)| = 2.01824$ kullanılarak $M_{Ch} = 5.83 \mu_e^{-2} M_\odot$, ya da $\mu_e = 2$ olan karbon–oksijen maddesi için $1.457 M_\odot$ elde edilir. Ayrıca sayısal örnekleri, gözlemsel sınamaları, sonlu-sıcaklık ölçeklerini, kararlılık ölçütlerini ve fiziksel düzeltmeleri tartışıyoruz.

Anahtar Kelimeler: beyaz cüceler; dejenere madde; Chandrasekhar sınırı; Fermi gazı; politroplar; Tip Ia süpernovaları

1. Giriş

Beyaz cücelerin varlığı, yıldızların sıcaklığın dinamik olarak ikincil olduğu bir dengeye ulaşabileceğini gösterir. Sirius'un sönük bir yoldaşı olarak keşfedilen ve daha sonra sıkışık ve sıcak olduğu anlaşılan Sirius B, erken dönemde bir paradoks ortaya koymuştur: ısıtması ve tayfı yıldızsal bir sıcaklığa işaret ederken, kütleçekimsel kütlesi ve küçük yarıçapı karasal maddeden birçok mertebe daha yüksek ortalama yoğunluklar gerektiriyordu. Çözüm kuantum mekaniksel idi. Fowler [2], yoğun yıldız maddesine Fermi–Dirac istatistiğini uygulayarak yeterince yüksek yoğunlukta bir elektron gazının dejenere hâle geldiğini ve sıfır sıcaklıkta bile basınç uyguladığını gösterdi. Stoner [3] ve Chandrasekhar [4, 5] daha sonra özel göreliliği dâhil ettiler ve elektron dejenerasyon basıncının maddeyi kütleçekime karşı destekleme yeteneğinin sınırlı olduğunu buldular. Sonuç, soğuk karbon–oksijen beyaz cüceleri için $1.4 M_\odot$ mertebesinde bir maksimum kütle olan Chandrasekhar kütlesidir. Standart ele alışlar [1, 6, 10, 11] içinde verilmiştir.

Fizik olağanüstü derecede saydamdır. Pauli dışarlama, h^3 hacimli bir faz uzayı hücresinde her spin durumu için bir tane olmak üzere en fazla iki elektrona izin verir. Bu nedenle sıkıştırma, elektronları daha büyük momentumlu durumlara zorlar. Relativistik olmayan elektronlar için kinetik enerji $p^2/(2m_e)$ olarak ölçeklenir ve basınç $n_e^{5/3}$ olarak ölçeklenir. Bu rejimde yıldız, $n = 3/2$ indisli bir politropla betimlenir ve yarıçap $M^{-1/3}$ olarak azalır. Daha da yüksek yoğunlukta elektronlar relativistik hâle gelir, $E \approx pc$ olur ve basınç yalnızca $n_e^{4/3}$ olarak ölçeklenir. Bu daha yumuşak hâl denklemini, kütlelerin merkezî yoğunluktan ve yarıçaptan bağımsız olduğu $n = 3$ indisli bir politropa karşılık gelir. Merkezî yoğunluğu artırmak artık desteklenen küt-

leyi artırmaz; yalnızca yarıçapı küçültür. Sınır kütle $\hbar, c, G$ ve baryon başına elektron oranı tarafından belirlenir.

Aynı sınır geniş bir astrofiziksel öneme sahiptir. Kararlı soğuk beyaz cücelerin üst kütlelerini belirler, gözlenen beyaz cüce kütlelerinin neden maksimumun oldukça altında kümeliendiğini açıklar ve Tip Ia süpernova öncüllerinin termonükleer kararsızlığının temelinde yer alır [14]. Bununla birlikte bu sınır tam evrensel bir sayı değildir. Ters beta bozunumu, Coulomb terimleri, sonlu-sıcaklık düzeltmeleri, genel görelilik, dönme, kristalleşme ve bileşim ideal Newtoncu değeri değiştirir. Temiz analitik türetim temel olmayı sürdürür; çünkü relativistik Fermi basıncı ile özkütleçekim arasındaki belirleyici boyutsuz rekabeti ortaya koyar.

Bu makale tarihsel bir derleme olmaktan ziyade titiz bir türetim olarak yazılmıştır. Önce faz uzayı ölçüsünü tanımlıyor ve sıfır-sıcaklık Fermi küresini türetiyoruz. Ardından basınç integralini tam olarak hesaplıyor ve sınır kuvvet yasalarını yeniden elde ediyoruz. Son olarak hidrostatik problemi politrop kuramını kullanarak çözüyor ve sayısal sabitleri açıkça değerlendiriyoruz.

2. Fiziksel ve Matematiksel Çerçeve

2.1. Pauli dışarlama ve soğuk Fermi denizi

Tanım 1 (Tam elektron dejenerasyonu). Bir elektron gazı, sıcaklık

$$k_B T \ll E_F, \quad (1)$$

koşulunu sağladığında tamamen dejenere olur; burada E_F Fermi enerjisidir. Sıfır sıcaklıkta $p < p_F$ olan tüm tek-parçacık momentum durumları doludur ve $p > p_F$ olan tüm durumlar boştur.

V hacmindeki bir elektron gazı için $d^3x d^3p$ elema-

Tablo 1. Sayısal değerlendirmelerde kullanılan sabitler.

Nicelik	Sembol	Değer
Planck sabiti	h	$6.62607015 \times 10^{-27}$ erg s
İndirgenmiş Planck sabiti	$\hbar$	$1.054571817 \times 10^{-27}$ erg s
Işık hızı	c	$2.99792458 \times 10^{10}$ cm s ⁻¹
Elektron kütlesi	m_e	$9.1093837 \times 10^{-28}$ g
Atomik kütle birimi	m_u	$1.6605391 \times 10^{-24}$ g
Kütleçekim sabiti	G	6.67430×10^{-8} cgs
Güneş kütlesi	$M_\odot$	1.98847×10^{33} g
Güneş yarıçapı	$R_\odot$	6.957×10^{10} cm

elde edilir. Böylece

$$P = \frac{1}{3} \int_0^{p_F} p v(p) \frac{8\pi p^2}{h^3} dp$$

$$= \frac{8\pi}{3h^3} \int_0^{p_F} p^3 v(p) dp. \quad (16)$$

Relativistik enerji

$$E(p) = \sqrt{p^2 c^2 + m_e^2 c^4}, \quad (17)$$

ve parçacık hızı grup hızı olarak

$$v(p) = \frac{dE}{dp} = \frac{pc^2}{\sqrt{p^2 c^2 + m_e^2 c^4}}. \quad (18)$$

şeklindedir. (16) içine yerleştirme, tam soğuk basınç integralini verir:

$$P = \frac{8\pi c^2}{3h^3} \int_0^{p_F} \frac{p^4 dp}{\sqrt{p^2 c^2 + m_e^2 c^4}}. \quad (19)$$

Aynı ifade termodinamikten de elde edilir. Eğer u_e durgun kütleyi içeren elektron enerji yoğunluğu ise, sıfır sıcaklıkta

$$P = n_e^2 \frac{d}{dn_e} \left(\frac{u_e}{n_e} \right). \quad (20)$$

Bu biçim kullanışlıdır; çünkü basıncın bağımsız bir varsayım olmadığını vurgular: basınç, dolu Fermi denizinin sıkıştırmaya verdiği yanıttır. Enerji yoğunluğu

$$u_e = \frac{8\pi}{h^3} \int_0^{p_F} p^2 E(p) dp. \quad (21)$$

şeklindedir. $n_e \propto p_F^3$ olduğundan, sıkıştırma hem birim hacimdeki dolu durum sayısını hem de integralin üst sınırını değiştirir. (21) denklemini p_F 'ye göre türevleyip (4) kullanmak (19) sonucunu yeniden verir. Bu tutarlılık denetimi önemlidir: dejenere basınç, virial teoremine giren aynı temel-durum enerjisinin mekanik ifadesidir.

3.2. Relativistik olmayan limit

$p_F \ll m_e c$ olduğunda hız

$$v(p) \simeq \frac{p}{m_e}. \quad (22)$$

olur. Denklem (16)

$$P_{NR} = \frac{8\pi}{3h^3 m_e} \int_0^{p_F} p^4 dp$$

$$= \frac{8\pi}{15h^3 m_e} p_F^5. \quad (23)$$

biçimini alır. $h = 2\pi\hbar$ kullanılarak

$$P_{NR} = \frac{p_F^5}{15\pi^2 \hbar^3 m_e}. \quad (24)$$

elde edilir. Şimdi (5) yerleştirilirse:

$$P_{NR} = \frac{1}{15\pi^2 \hbar^3 m_e} \hbar^5 (3\pi^2 n_e)^{5/3}$$

$$= \frac{\hbar^2}{5m_e} (3\pi^2)^{2/3} n_e^{5/3}. \quad (25)$$

Kütle yoğunluğu cinsinden,

$$P_{NR} = K_{NR} \rho^{5/3}, \quad (26)$$

burada

$$K_{NR} = \frac{\hbar^2}{5m_e} (3\pi^2)^{2/3} (\mu_e m_u)^{-5/3}. \quad (27)$$

Not 2. 5/3 üssünün basit bir kökeni vardır. Sıkıştırma karakteristik momentumu $p_F \propto n_e^{1/3}$ olarak artırır; relativistik olmayan kinetik enerji p_F^2 olarak ölçeklenir; basınç enerji yoğunluğudur ve bu nedenle $n_e p_F^2 \propto n_e^{5/3}$ olarak ölçeklenir.

3.3. Ultra-relativistik limit

$p_F \gg m_e c$ olduğunda elektron hızı

$$v(p) \simeq c. \quad (28)$$

değerine yaklaşır. Denklem (16)

$$P_{UR} = \frac{8\pi c}{3h^3} \int_0^{p_F} p^3 dp$$

$$= \frac{2\pi c}{3h^3} p_F^4. \quad (29)$$

sonucunu verir. Eşdeğer olarak,

$$P_{UR} = \frac{c}{12\pi^2 \hbar^3} p_F^4. \quad (30)$$

(5) kullanılarak

$$P_{UR} = \frac{c}{12\pi^2\hbar^3} \hbar^4 (3\pi^2 n_e)^{4/3} = \frac{\hbar c}{4} (3\pi^2)^{1/3} n_e^{4/3}. \quad (31)$$

Dolayısıyla

$$P_{UR} = K_{UR} \rho^{4/3}, \quad (32)$$

ve

$$K_{UR} = \frac{\hbar c}{4} (3\pi^2)^{1/3} (\mu_e m_u)^{-4/3}. \quad (33)$$

Not 3. Görelilik hâl denklemini yumuşatır. $E \approx pc$, $p^2/(2m_e)$ yerine geçtiği için basınç $n_e p_F \propto n_e^{4/3}$ olarak ölçeklenir. 5/3 değerinden 4/3 değerine bu değişim, sınır kütlelerin matematiksel kaynağıdır.

3.4. Chandrasekhar'ın tam sıfır-sıcaklık hâl denklemini

$$p = m_e c y, \quad p_F = m_e c x. \quad (34)$$

alalım. O zaman (19)

$$P = \frac{8\pi m_e^4 c^5}{3h^3} \int_0^x \frac{y^4 dy}{\sqrt{1+y^2}} = \frac{m_e^4 c^5}{3\pi^2 \hbar^3} \int_0^x \frac{y^4 dy}{\sqrt{1+y^2}}. \quad (35)$$

biçimine gelir. İntegralin kapalı biçimi

$$\int_0^x \frac{y^4 dy}{\sqrt{1+y^2}} = \frac{1}{8} \left[x(2x^2 - 3)\sqrt{1+x^2} + 3 \sinh^{-1} x \right]. \quad (36)$$

şeklindedir. Bu nedenle

$$P = A f(x), \quad (37)$$

burada

$$A = \frac{m_e^4 c^5}{24\pi^2 \hbar^3} \quad (38)$$

ve

$$f(x) = x(2x^2 - 3)(1 + x^2)^{1/2} + 3 \sinh^{-1} x. \quad (39)$$

İlişkili yoğunluk

$$\rho = \rho_0 \mu_e x^3, \quad (40)$$

olup ρ_0 , (11) içinde tanımlanmıştır.

Tam hâl denkleminin logaritmik sertliği

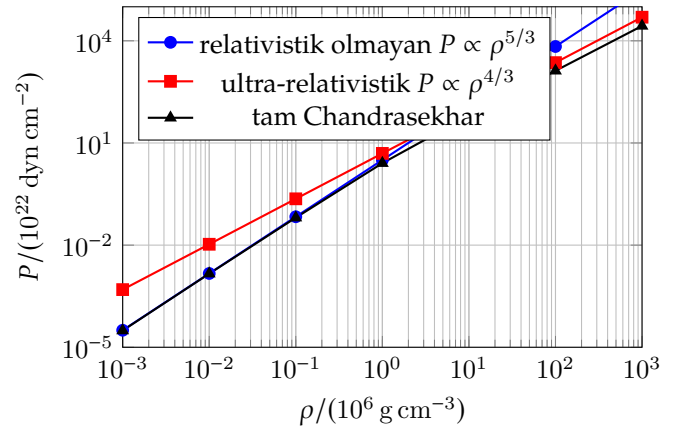
$$\gamma(x) = \frac{d \ln P}{d \ln \rho}. \quad (41)$$

ile ölçülür. $\rho \propto x^3$ olduğundan, (39) denkleminin türevlenmesi

$$\gamma(x) = \frac{x f'(x)}{3 f(x)} = \frac{8x^5}{3(1+x^2)^{1/2} f(x)}. \quad (42)$$

sonucunu verir. Dolayısıyla

$$\lim_{x \rightarrow 0} \gamma(x) = \frac{5}{3}, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \gamma(x) = \frac{4}{3}. \quad (43)$$



Şekil 2. $\mu_e = 2$ için dejenere-elektron basıncı. Tam Chandrasekhar hâl denklemini düşük yoğunlukta relativistik olmayan eğriye, yüksek yoğunlukta ise ultra-relativistik eğriye yaklaşıyor.

4/3 değerine yaklaşım kademelidir: kütleli beyaz cüceler içlerinin tamamında tam olarak $n = 3$ politropoları değildir, fakat merkezî bölgeleri bu marjinal sertliğe giderek daha çok yaklaşıyor.

Sınır biçimler açılımla elde edilir. $x \ll 1$ için

$$f(x) = \frac{8}{5} x^5 - \frac{4}{7} x^7 + O(x^9), \quad (44)$$

olduğundan (37), (25) denkleminde indirgenir. $x \gg 1$ için

$$f(x) = 2x^4 - 2x^2 + 3 \ln(2x) + O(x^{-2}), \quad (45)$$

ve öncü terim (31) sonucunu verir. Şekil 2 geçişi göstermektedir.

4. Hidrostatik Denge ve Politropolar

4.1. Newtoncu yıldız yapısı

Statik, küresel bir yıldız için kütle korunumu ve hidrostatik denge

$$\frac{dm}{dr} = 4\pi r^2 \rho, \quad (46)$$

ve

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{Gm(r)\rho}{r^2}. \quad (47)$$

şeklindedir. Bir politropik hâl denklemini

$$P = K \rho^{1+1/n}, \quad (48)$$

biçimine sahiptir; burada n politropik indistir. Şu değişkenleri tanımlayalım:

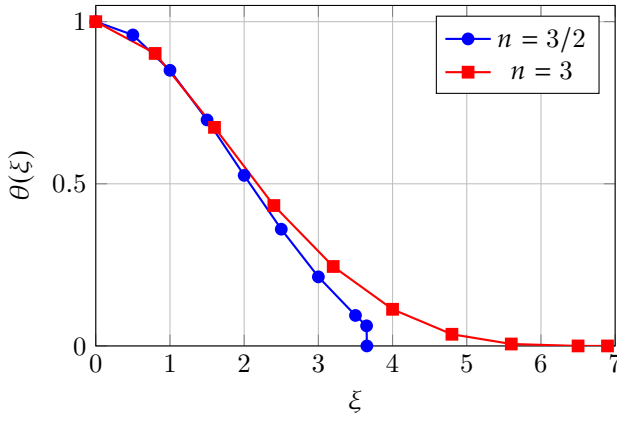
$$\rho(r) = \rho_c \theta^n(\xi), \quad r = a \xi, \quad (49)$$

ve

$$a^2 = \frac{(n+1)K}{4\pi G} \rho_c^{1/n-1}. \quad (50)$$

Yıldız yapısı denklemleri Lane–Emden denkleminde indirgenir:

$$\frac{1}{\xi^2} \frac{d}{d\xi} \left(\xi^2 \frac{d\theta}{d\xi} \right) = -\theta^n, \quad (51)$$



Şekil 3. Relativistik olmayan ve ultra-relativistik dejenere beyaz cüceler için temsili Lane-Emden fonksiyonları. İlk sıfır yüzeyi belirler.

merkez sınır koşulları ise

$$\theta(0) = 1, \quad \theta'(0) = 0. \quad (52)$$

şeklindedir. Yıldız yüzeyi ilk sıfırdır:

$$\theta(\xi_1) = 0. \quad (53)$$

Yarıçap

$$R = a\xi_1, \quad (54)$$

ve kütle

$$\begin{aligned} M &= 4\pi \int_0^R r^2 \rho \, dr \\ &= 4\pi a^3 \rho_c \int_0^{\xi_1} \xi^2 \theta^n \, d\xi. \end{aligned} \quad (55)$$

olur. (51) kullanılarak

$$\int_0^{\xi_1} \xi^2 \theta^n \, d\xi = -\xi_1^2 \theta'(\xi_1), \quad (56)$$

elde edilir, dolayısıyla

$$M = 4\pi a^3 \rho_c \xi_1^2 |\theta'(\xi_1)|. \quad (57)$$

Bir politropun merkezî yoğunluğunun ortalama yoğunluğa oranı da Lane-Emden çözümüyle belirlenir.

$$\bar{\rho} = \frac{3M}{4\pi R^3}, \quad (58)$$

olmak üzere, (54) ve (57) denklemleri

$$\frac{\rho_c}{\bar{\rho}} = \frac{\xi_1}{3|\theta'(\xi_1)|}. \quad (59)$$

sonucunu verir. Bu oran $n = 3/2$ için 5.99, $n = 3$ için 54.2 değerindedir. Bu nedenle relativistik beyaz cüceler, düşük kütleli relativistik olmayan beyaz cücelere göre çok daha merkezde yoğunlaşmıştır.

4.2. Relativistik olmayan $n = 3/2$ beyaz cücesi

Denklem (26)

$$1 + \frac{1}{n} = \frac{5}{3}, \quad n = \frac{3}{2}. \quad (60)$$

değerine sahiptir. $n = 3/2$ için

$$a^2 = \frac{5K_{NR}}{8\pi G} \rho_c^{-1/3}. \quad (61)$$

Kütle ve yarıçap

$$R = \xi_1 \left(\frac{5K_{NR}}{8\pi G} \right)^{1/2} \rho_c^{-1/6}, \quad (62)$$

ve

$$M = 4\pi \left(\frac{5K_{NR}}{8\pi G} \right)^{3/2} \rho_c^{1/2} \xi_1^2 |\theta'(\xi_1)|. \quad (63)$$

şeklindedir. ρ_c yok edilirse

$$R = C_{3/2} \frac{K_{NR}}{G} M^{-1/3}, \quad (64)$$

elde edilir; burada

$$C_{3/2} = \xi_1 \left[4\pi \xi_1^2 |\theta'(\xi_1)| \right]^{1/3} \frac{5}{8\pi}. \quad (65)$$

Böylece

$$R \propto K_{NR} M^{-1/3} \propto \mu_e^{-5/3} M^{-1/3}. \quad (66)$$

Yaygın kullanılan sayısal bir biçim

$$\begin{aligned} R_{NR} &\simeq 0.0112 R_\odot \left(\frac{\mu_e}{2} \right)^{-5/3} \\ &\times \left(\frac{M}{M_\odot} \right)^{-1/3}. \end{aligned} \quad (67)$$

şeklindedir.

Not 4. Ters kütle-yarıçap ilişkisi sıradan yıldızların tersidir. Kütle eklemek yıldızı sıkıştırır; bu da elektron momentumlarını ve basıncı artırır. Relativistik olmayan rejimde bu basınç artışı, daha küçük bir yarıçapta dengeyi yeniden kuracak kadar güçlüdür.

4.3. Ultra-relativistik $n = 3$ beyaz cücesi

Denklem (32)

$$1 + \frac{1}{n} = \frac{4}{3}, \quad n = 3. \quad (68)$$

değerine sahiptir. $n = 3$ için

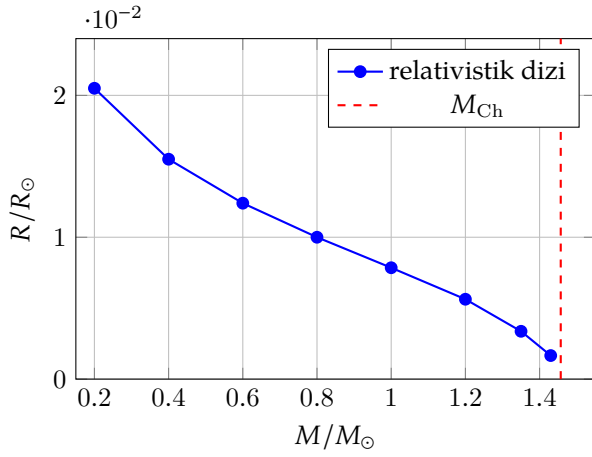
$$a^2 = \frac{K_{UR}}{\pi G} \rho_c^{-2/3}. \quad (69)$$

Yarıçap

$$R = \xi_1 \left(\frac{K_{UR}}{\pi G} \right)^{1/2} \rho_c^{-1/3}, \quad (70)$$

olur; ancak kütle

$$M = 4\pi \left(\frac{K_{UR}}{\pi G} \right)^{3/2} \xi_1^2 |\theta'(\xi_1)|$$



Şekil 4. $\mu_e = 2$ için yaklaşık beyaz cüce kütle-yarıçap ilişkisi. Relativistik dejenere, kütle Chandrasekhar sınırına yaklaşırken yarıçapı sıfıra doğru sürükler.

$$\equiv M_{\text{Ch}}. \quad (71)$$

şeklinde. ρ_c 'ye tüm bağımlılık yok olmuştur. Bu nedenle $n = 3$ politropu, aynı kütleye ve farklı yarıçaplara sahip konfigürasyonlardan oluşan tek-parametrelili bir aileyi temsil eder. Merkezî yoğunluğu artırmak yarıçapı küçültür, fakat desteklenen kütleyi artırmaz.

$n = 3$ için sayısal Lane–Emden sabiti

$$\xi_1^2 |\theta'(\xi_1)| = 2.01824, \quad \xi_1 = 6.89685. \quad (72)$$

şeklinde. (33) ifadesinin (71) içine yerleştirilmesi

$$M_{\text{Ch}} = 4\pi \left[\frac{1}{\pi G} \frac{\hbar c}{4} (3\pi^2)^{1/3} (\mu_e m_u)^{-4/3} \right]^{3/2} \times \xi_1^2 |\theta'(\xi_1)|. \quad (73)$$

sonucunu verir. Kuvvetler toplanırsa

$$M_{\text{Ch}} = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \xi_1^2 |\theta'(\xi_1)| \left(\frac{\hbar c}{4G} \right)^{3/2} \times (3\pi^2)^{1/2} \frac{1}{\mu_e^2 m_u^2}. \quad (74)$$

elde edilir. Tablo 1'deki sabitlerle değerlendirme

$$M_{\text{Ch}} = 5.83 \mu_e^{-2} M_{\odot}. \quad (75)$$

sonucunu verir. Karbon–oksijen maddesi için

$$\mu_e = 2, \quad M_{\text{Ch}} = 1.457 M_{\odot}. \quad (76)$$

olur.

Önerme 1 (İdeal modelde Chandrasekhar kütlesi). İdeal, tamamen dejenere bir elektron gazı tarafından desteklenen soğuk, Newtoncu, dönmeyen bir beyaz cücenin üst kütlesi

$$M_{\text{max}} = M_{\text{Ch}} = 5.83 \mu_e^{-2} M_{\odot}. \quad (77)$$

şeklinde. $\mu_e = 2$ için bu değer $1.457 M_{\odot}$ olur.

4.4. Kararlılık ve adyabatik indisin rolü

Kütle sınırı dinamik kararlılık aracılığıyla da yorumlanabilir. Sabit bileşim ve entropiye sahip denge modellerinden oluşan bir dizi için radyal kararsızlığın başlangıcı bir dönüm noktasında ortaya çıkar:

$$\frac{dM}{d\rho_c} = 0. \quad (78)$$

Relativistik olmayan dizide $M \propto \rho_c^{1/2}$ olduğundan bu ölçüte göre kararlıdır; buna karşılık sınır $n = 3$ dizisinde $dM/d\rho_c = 0$ olup marjinaldir.

İlgili yerel bir ifade virial teoreminden gelir. Basınç yanıtı

$$\delta P = \Gamma_1 P \frac{\delta \rho}{\rho} \quad (79)$$

olan özkütleçekimli bir akışkan, hacim ortalamalı adyabatik üs

$$\Gamma_1 > \frac{4}{3}. \quad (80)$$

değerini aşıyorsa basınç tarafından kararlılaştırılır. Tam elektron gazı sonlu herhangi bir x için $\gamma(x) > 4/3$ değerine sahiptir; ancak x büyüdükçe $\gamma(x)$ yukarıdan $4/3$ değerine yaklaşır. Bu, Newtoncu ideal dizinin sonlu bir merkezî yoğunlukta keskin bir kararsızlığa ulaşmak yerine neden asimptotik olarak marjinalliğe yaklaştığını açıklar. Gerçek yıldızlarda genel görelilik, ters beta bozunumu ve Coulomb etkileri kararsızlığı sonlu bir yoğunluğa taşıyan ek terimler sağlar.

5. Sezgisel Enerji Türetimi

Biçimsel Lane–Emden hesabı bir ölçekleme argümanıya anlaşılabılır. N baryon sayısı ve $N_e \simeq N/\mu_e$ elektron sayısı olsun. Yıldızın yarıçapı R ise

$$n_e \sim \frac{N_e}{R^3}. \quad (81)$$

Fermi momentumu

$$p_F \sim \hbar n_e^{1/3} \sim \frac{\hbar N_e^{1/3}}{R}. \quad (82)$$

olarak ölçeklenir. Ultra-relativistik rejimde elektron kinetik enerjisi

$$E_{\text{kin}} \sim N_e p_{Fc} \sim \frac{\hbar c N_e^{4/3}}{R}. \quad (83)$$

şeklinde. Kütleçekim enerjisi

$$E_{\text{grav}} \sim -\frac{GM^2}{R}. \quad (84)$$

olur. Dolayısıyla

$$E(R) \sim \frac{N^{4/3} \hbar c}{\mu_e^{4/3} R} - \frac{GM^2}{R}. \quad (85)$$

$M \simeq N m_u$ olduğundan bu şematik olarak

$$E(R) \sim \frac{N^{4/3} \hbar c - GM^2}{R}, \quad (86)$$

biçiminde yazılabilir; burada bileşim faktörü ve birlik mertebesindeki sabitler bastırılmıştır.

Kritik özellik, hem ultra-relativistik dejenereasyon enerjisinin hem de kütleçekim enerjisinin R^{-1} olarak ölçeklenmesidir. $1/R$ katsayısı pozitifse genişleme tercih edilir; negatifse çökme tercih edilir; sıfırda konfigürasyon marjinaldir. Marjinal koşul

$$\hbar c N^{4/3} \sim G m_u^2 N^2, \quad (87)$$

olup

$$N \sim \left(\frac{\hbar c}{G m_u^2} \right)^{3/2}. \quad (88)$$

sonucunu verir. Bu nedenle

$$M \sim m_u \left(\frac{\hbar c}{G m_u^2} \right)^{3/2} = \left(\frac{\hbar c}{G} \right)^{3/2} m_u^{-2}. \quad (89)$$

Bu Chandrasekhar ölçeğidir. $n = 3$ Lane–Emden probleminin çözülmesiyle elde edilen tam katsayı, (75) içindeki $5.83 \mu_e^{-2}$ değeridir.

6. Çözümlü Sayısal Uygulamalar

6.1. Tipik bir beyaz cüce yoğunluğunda Fermi momentumu ve basınç

Şu değerlere sahip karbon–oksijen maddesini ele alalım:

$$\mu_e = 2, \quad \rho = 10^6 \text{ g cm}^{-3}. \quad (90)$$

Denklem (8)

$$\begin{aligned} n_e &= \frac{10^6}{2(1.6605391 \times 10^{-24})} \text{ cm}^{-3} \\ &= 3.01 \times 10^{29} \text{ cm}^{-3}. \end{aligned} \quad (91)$$

sonucunu verir. Fermi momentumu

$$\begin{aligned} p_F &= \hbar(3\pi^2 n_e)^{1/3} \\ &= 2.18 \times 10^{-17} \text{ g cm s}^{-1}. \end{aligned} \quad (92)$$

olur. Boyutsuz relativite parametresi

$$x = \frac{p_F}{m_e c} = 0.798. \quad (93)$$

şeklindedir. Bu nedenle elektronlar hafifçe relativistiktir. (25) denkleminde relativistik olmayan basınç kestirimi

$$P_{NR} = 3.16 \times 10^{22} \text{ dyn cm}^{-2}, \quad (94)$$

iken tam Chandrasekhar hâl denklemi yaklaşık olarak

$$P \approx 2.6 \times 10^{22} \text{ dyn cm}^{-2}. \quad (95)$$

verir. x küçük olmadığı için fark şimdiden önemlidir. Daha yüksek yoğunluklarda relativistik olmayan ifade gazın sertliğini giderek daha fazla tahmin eder.

6.2. Kütle–yarıçap kestirimi ve Sirius B

Sirius B'nin dinamik kütlesi yaklaşık olarak

$$M_{\text{Sirius B}} \approx 1.02 M_{\odot}. \quad (96)$$

değerindedir. $\mu_e = 2$ ile relativistik olmayan kütle–yarıçap yasası (67) kullanılırsa

$$\begin{aligned} R_{NR} &\approx 0.0112 R_{\odot} (1.02)^{-1/3} \\ &\approx 0.0111 R_{\odot}. \end{aligned} \quad (97)$$

elde edilir. Santimetre cinsinden,

$$R_{NR} \approx 7.7 \times 10^8 \text{ cm}. \quad (98)$$

Böylesine kütleli bir beyaz cüce için relativistik düzeltme gereklidir. Gösterim amacıyla sıklıkla kullanılan doğru bir analitik interpolasyon [15]

$$\begin{aligned} R &\approx 0.0112 R_{\odot} \left[\left(\frac{M_{\text{Ch}}}{M} \right)^{2/3} \right. \\ &\quad \left. - \left(\frac{M}{M_{\text{Ch}}} \right)^{2/3} \right]^{1/2}, \end{aligned} \quad (99)$$

şeklindedir; burada $\mu_e = 2$ için $M_{\text{Ch}} = 1.457 M_{\odot}$ alınır. Sirius B için

$$\begin{aligned} R &\approx 0.0112 R_{\odot} \left[\left(\frac{1.457}{1.02} \right)^{2/3} \right. \\ &\quad \left. - \left(\frac{1.02}{1.457} \right)^{2/3} \right]^{1/2} \\ &\approx 0.0076 R_{\odot}. \end{aligned} \quad (100)$$

Bu değer, yaklaşık $8 \times 10^{-3} R_{\odot}$ olan gözlenen yarıçapla aynı mertebededir ve Sirius B'nin tarihsel olarak neden belirleyici olduğunu gösterir: Dünya'nınkiyle karşılaşılabilir bir yarıçapa hapsedilmiş yıldız kütlesi, ideal gaz basıncını değil dejenereasyon basıncını gerektirir.

6.3. Kütleli bir karbon–oksijen beyaz cücesi

İkinci bir örnek olarak kütlesi

$$M = 1.30 M_{\odot}, \quad \mu_e = 2. \quad (101)$$

olan ideal bir karbon–oksijen beyaz cücesini ele alalım. (99) kullanılarak

$$\begin{aligned} R &\approx 0.0112 R_{\odot} \left[\left(\frac{1.457}{1.30} \right)^{2/3} \right. \\ &\quad \left. - \left(\frac{1.30}{1.457} \right)^{2/3} \right]^{1/2} \\ &= 0.00437 R_{\odot}. \end{aligned} \quad (102)$$

elde edilir. Böylece

$$R = 3.04 \times 10^8 \text{ cm}. \quad (103)$$

Ortalama yoğunluk

$$\bar{\rho} = \frac{3M}{4\pi R^3} = 2.20 \times 10^7 \text{ g cm}^{-3}. \quad (104)$$

olur. İç yapı merkezde yoğunlaşmış $n = 3$ politropu ile yaklaştırılırsa, (59)

$$\rho_c \simeq 54.2 \bar{\rho} = 1.19 \times 10^9 \text{ g cm}^{-3}. \quad (105)$$

sonucunu verir. Merkezî relativite parametresi o hâlde

$$x_c = \left(\frac{\rho_c}{\rho_0 \mu_e} \right)^{1/3} = 8.48. \quad (106)$$

olur. Karşılık gelen kinetik Fermi enerjisi

$$E_{F,\text{kin}} = m_e c^2 \left[(1 + x_c^2)^{1/2} - 1 \right] = 3.87 \text{ MeV}. \quad (107)$$

değerindedir. Bu değer yaşlı bir beyaz cücedeki termal enerjilere kıyasla büyüktür ve yüksek kütleli beyaz cücelerin çekirdeklerinde neden derinden dejenere ve relativistik olduklarını gösterir.

Aynı model muazzam bir yüzey kütleçekimi öngörür:

$$g = \frac{GM}{R^2} = 1.87 \times 10^9 \text{ cm s}^{-2}. \quad (108)$$

Eşdeğer bir hız olarak ifade edilen zayıf-alan kütleçekimsel kırmızıya kayması

$$v_{\text{gr}} = zc \simeq \frac{GM}{Rc} = 1.89 \times 10^7 \text{ cm s}^{-1} = 189 \text{ km s}^{-1}. \quad (109)$$

şeklinde. Bu tür kırmızıya kaymalar tayfsal olarak ölçülebilir ve kütle-yarıçap ilişkisini sınamak için gözlemsel bir yol sağlar.

6.4. Farklı bileşimler için Chandrasekhar kütlesi

Helyum, karbon ve oksijen maddesi için $\mu_e \simeq 2$ olup

$$M_{\text{Ch}} = 1.457 M_{\odot}. \quad (110)$$

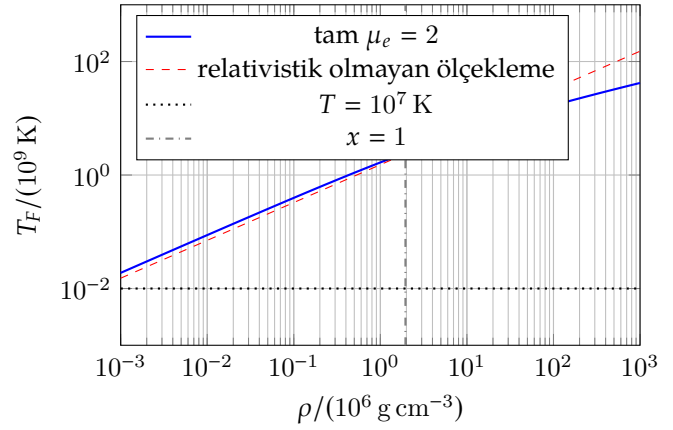
elde edilir. Saf demir için

$$\mu_e = \frac{56}{26} = 2.154, \quad (111)$$

dolayısıyla

$$M_{\text{Ch,Fe}} = 5.83(2.154)^{-2} M_{\odot} = 1.26 M_{\odot}. \quad (112)$$

olur. Bu, sınır kütleinin elektron kesri tarafından denetlendiğini gösterir. Daha nötronca zengin madde barın başına daha az elektrona sahiptir ve bu nedenle sabit kütle yoğunluğunda daha az dejenere basınç sağlar.



Şekil 5. $\mu_e = 2$ için yoğunluğun fonksiyonu olarak Fermi sıcaklığı. Mütevazı beyaz cüce yoğunluklarında bile T_F tipik iç sıcaklıkların çok üzerindedir; bu da elektron basıncı için sıfır-sıcaklık yaklaşımını doğrular.

7. Genişletmeler, Genellemeler ve Gözlemsel Sınamalar

7.1. Sonlu sıcaklık ve dejenereasyon ölçeği

Beyaz cüceler sıfır sıcaklıkta değildir, fakat elektronları genellikle sıfır-sıcaklık limitine yakındır. Kinetik Fermi enerjisi

$$E_{F,\text{kin}} = m_e c^2 \left[(1 + x^2)^{1/2} - 1 \right]. \quad (113)$$

şeklinde. İlişkili Fermi sıcaklığı

$$T_F = \frac{E_{F,\text{kin}}}{k_B}. \quad (114)$$

olarak tanımlanır. (11) kullanılarak

$$x = \left(\frac{\rho}{\rho_0 \mu_e} \right)^{1/3}. \quad (115)$$

elde edilir. $\mu_e = 2$ ve $\rho = 10^6 \text{ g cm}^{-3}$ için

$$T_F = 1.62 \times 10^9 \text{ K}. \quad (116)$$

Gözlenen etkin sıcaklıklar tipik olarak 10^4 – 10^5 K düzeyindedir ve genç sıcak beyaz cücelerin iç sıcaklıkları bile genellikle T_F değerinin çok altındadır. Termal düzeltmeler için küçük parametre

$$\eta_T = \frac{k_B T}{E_{F,\text{kin}}} = \frac{T}{T_F}. \quad (117)$$

şeklinde. $\eta_T \ll 1$ olduğunda, dejenere Fermi gazına öncü termal düzeltme

$$\frac{\Delta P}{P} \sim \eta_T^2. \quad (118)$$

mertebedesindedir. Bu nedenle termal basınç, küresel kütle sınırını etkilediğinden çok daha güçlü biçimde dış zarfı ve soğuma ısıtmasını etkiler.

7.2. Kütle-yarıçap ilişkisi nasıl sınırlanır

Bir beyaz cüce yarıçapı akıdan, uzaklıktan ve etkin sıcaklıktan çıkarılabilir. F_{bol} ölçülen bolometrik akı ve D uzaklık ise

$$L = 4\pi D^2 F_{\text{bol}} = 4\pi R^2 \sigma_{\text{SB}} T_{\text{eff}}^4. \quad (119)$$

Dolayısıyla

$$R = D \left(\frac{F_{\text{bol}}}{\sigma_{\text{SB}} T_{\text{eff}}^4} \right)^{1/2}. \quad (120)$$

Kütle, çift yıldız dinamiğinden, astrometriden ya da kütleçekimsel kırmızıya kaymadan elde edilebilir. Yörünge dönemi P_{orb} ve radyal-hız yarı genliği K_1 olan tek çizgili bir çift yıldız için kütle fonksiyonu

$$f(M) = \frac{P_{\text{orb}} K_1^3}{2\pi G} = \frac{(M_2 \sin i)^3}{(M_1 + M_2)^2}. \quad (121)$$

şeklinde. Elverişli tutulmalı sistemlerde eğim i doğru olarak bilinir ve dinamik bir kütle verir.

Kütleçekimsel kırmızıya kayma bağımsız bir kütle-yarıçap ölçümü sağlar. Zayıf-alan limitinde

$$z = \frac{\Delta\lambda}{\lambda} \approx \frac{GM}{Rc^2}. \quad (122)$$

Eşdeğer olarak, kırmızıya kayma hızı

$$v_{\text{gr}} = zc \approx 0.636 \frac{M/M_{\odot}}{R/R_{\odot}} \text{ km s}^{-1}. \quad (123)$$

olur. (120) ve (122) denklemlerinin birleştirilmesi, gözlenen beyaz cücelerin öngörülen ters kütle-yarıçap eğilimini izleyip izlemediğini sınar. En güçlü sınamalar, atmosfer modellemesinin, paralaksın ve dinamik kütlelerin birlikte mevcut olduğu sistemleri kullanır.

7.3. Tek bir soğuk bileşimin ötesinde

İdeal model tek bir μ_e değeri varsayar. Gerçek beyaz cüceler katmanlıdır; karbon-oksijen ya da oksijen-neon çekirdeğe, helyum mantoya ve çoğu kez ince bir hidrojen atmosferine sahiptir. Yararlı bir yerel genelleme

$$n_e(r) = \frac{\rho(r)}{m_u} \sum_i \frac{Z_i X_i(r)}{A_i}. \quad (124)$$

şeklinde. Hidrostatik denklemler o zaman (46) ve (47) olarak kalır, fakat hâl denklemi bileşim profili aracılığıyla konuma bağlı hâle gelir. Bileşim yalnızca düşük kütleli dış katmanda değişiyorsa, kütlelerin çoğu çekirdekte bulunduğundan M_{Ch} üzerindeki etki küçüktür. Ancak çekirdek nötronla zenginleşirse, elektron kesrindeki azalma sınır kütleli doğrudan düşürür.

Elektron kesrinin kullanışlı bir ölçüsü

$$Y_e = \frac{1}{\mu_e}. \quad (125)$$

şeklinde. İdeal sınır

$$M_{\text{Ch}} = 5.83 Y_e^2 M_{\odot}. \quad (126)$$

olarak yazılabilir. Bu biçim, elektron yakalanmalarının yoğun çekirdekleri neden kararsızlaştırdığını açık kılar: Y_e değerini düşürürler ve dejenerasyon basıncı tarafından desteklenebilen kütle Y_e^2 olarak azalır.

8. Tartışma

8.1. Varsayımlar ve geçerlilik alanı

İdeal Chandrasekhar türetimi birkaç varsayıma dayanır. Birincisi, elektronların tamamen dejenere kabul edilmesidir. Bu, olgun beyaz cüceler için mükemmel bir yaklaşımdır; çünkü Fermi enerjileri tipik olarak $k_B T$ değerinden çok daha büyüktür. İkincisi, iyonların kütleli sağladığı fakat ihmal edilebilir basınç verdiği kabul edilir. Bu genellikle dinamik olarak geçerlidir; ancak iyonik termal enerji soğumayı ve kristalleşmeyi denetler. Üçüncüsü, Newtoncu kütleçekim kullanılır. Çoğu beyaz cüce için $GM/(Rc^2) \ll 1$ olmakla birlikte, relativistik kütleçekim sınır kütle yakınında önem kazanır. Dördüncüsü, elektron gazı Coulomb, değiş-tokuş, manyetik ya da örgü düzeltmeleri olmaksızın idealdir. Bu terimler öncü dejenerasyon basıncına kıyasla küçüktür, fakat hassas kütle-yarıçap hesapları için önemlidir.

Tam hâl denklemi (37) ayrıca düzgün yerel bileşim ve sıfır sıcaklık varsayar. Gerçek yıldızlarda bileşim tabakalı olabilir: karbon-oksijen çekirdek, helyum katmanı ve hidrojen atmosferi yaygındır. Böyle katmanlaşma gözlenen yarıçapları ve soğuma yaşlarını değiştirir, ancak çekirdeğin $\mu_e \approx 2$ değerine sahip olması nedeniyle öncü Chandrasekhar ölçeğini değiştirmez.

8.2. Ters beta bozunumu ve nötronlaşma

Yeterince yüksek yoğunlukta elektron Fermi enerjileri elektron yakalanmalarını tetikleyecek kadar büyür:

$$e^- + (A, Z) \rightarrow (A, Z - 1) + \nu_e. \quad (127)$$

Eşik koşulu yaklaşık olarak

$$E_F \gtrsim Q_{\text{nuc}}, \quad (128)$$

şeklinde; burada Q_{nuc} ilgili nükleer kütle-enerji farkıdır. Elektron yakalanması sabit baryon yoğunluğunda n_e değerini azaltır ve dolayısıyla dejenerasyon basıncını düşürür. Oksijen-neon-magnezyum çekirdeklerinde bu süreç ideal Chandrasekhar kütleline ulaşmadan önce çöküşü indükleyebilir. Karbon-oksijen beyaz cücelerinde ise termonükleer kaçak genellikle öncül çekirdekte yaygın nötronlaşmadan önce devreye girer.

8.3. Coulomb ve örgü düzeltmeleri

İyonlar, Coulomb enerjileri termal enerjilerini aştığında güçlü bağlı bir plazma oluşturur. Bağlanma parametresi

$$\Gamma = \frac{Z^2 e^2}{a_i k_B T}, \quad (129)$$

şeklinde; burada

$$a_i = \left(\frac{3}{4\pi n_i} \right)^{1/3} \quad (130)$$

iyon-küre yarıçapıdır. Coulomb etkileşimleri toplam enerjiyi düşürür ve ideal elektron gazına kıyasla basıncı hafifçe azaltır. Düşük sıcaklıkta iyonlar kristalleşir;

bu da beyaz cüce soğumasını ve titreşimlerini etkiler. Hamada–Salpeter kütle–yarıçap ilişkileri [8] bu tür düzeltmeleri içerir ve gözlemlerle ayrıntılı karşılaştırma için ideal formülden daha doğrudur. Salpeter [9] karışık gelen sıfır-sıcaklık plazma düzeltmelerini verir.

8.4. Genel görelilik

Genel görelilik, kütleçekimi Newtoncu kurama göre güçlendirir [12, 13]. Hidrostatik denge bu durumda Tolman–Oppenheimer–Volkoff denklemi tarafından yönetilir:

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{G}{r^2} \frac{[\epsilon + P/c^2] [m + 4\pi r^3 P/c^2]}{1 - 2Gm/(rc^2)}, \quad (131)$$

ve

$$\frac{dm}{dr} = 4\pi r^2 \epsilon. \quad (132)$$

Burada ϵ kütle-enerji yoğunluğudur. Olağan beyaz cüceler için kompaktlık küçüktür:

$$\frac{GM}{Rc^2} \sim 10^{-4} - 10^{-3}, \quad (133)$$

bu nedenle Newtoncu kuram genellikle doğrudur. Bununla birlikte maksimum kütle yakınında genel görelilik kararlı kütleli biraz düşürür ve en yüksek yoğunluklu konfigürasyonların kararsızlığına katkıda bulunur.

8.5. Dönme ve manyetik alanlar

Düzgün dönme maksimum kütleli artırır; çünkü merkezkaç desteği etkin kütleçekimi azaltır. Kaba bir ölçü

$$\frac{T}{|W|} \sim \frac{\Omega^2 R^3}{GM}, \quad (134)$$

şeklinde; burada T dönme kinetik enerjisi ve W kütleçekimsel bağlanma enerjisidir. Dönme, Kepler açısal hızına yakın değerlerde dinamik olarak önemli hâle gelir:

$$\Omega_K \simeq \left(\frac{GM}{R^3} \right)^{1/2}. \quad (135)$$

Diferansiyel dönme daha büyük kütleleri geçici olarak destekleyebilir; ancak manyetik torklar ve viskozite açısal momentumu yeniden dağıtma eğilimindedir. Güçlü manyetik alanlar Landau kuantizasyonu aracılığıyla elektron faz uzayını değiştirebilir, fakat küresel Chandrasekhar sınırını değiştirecek kadar büyük alanlar uç değerlerdedir ve manyetik gerilmeler ile kararlılık kısıtlarıyla birlikte ele alınmalıdır.

8.6. Gözlemsel beyaz cüce kütleleri

Gözlenen beyaz cüce kütleleri

$$M_{\text{peak}} \simeq 0.6 M_{\odot}, \quad (136)$$

civarında kümelenir ve M_{Ch} değerinin oldukça altındadır. Bu bir çelişki değildir. Çoğu beyaz cüce, zarflarını kırmızı-dev ve asimptotik-dev kollarında kaybetmiş

düşük ve orta kütleli yıldızların açığa çıkmış çekirdekleridir. Tipik artık kütleli Chandrasekhar sınırı değil, yıldız evrimi belirler. Sınır bunun yerine kararlı beyaz cüce dağılımının üst ucunu ve madde yığan ya da birleşen sistemlerin kaderini belirler.

Yakın çiftlerde bir karbon–oksijen beyaz cücesi yığılma yoluyla sınır kütleyle yaklaşabilir ya da başka bir beyaz cüce ile birleşebilir. Sıkışma ısınması, karbon tutuşması, konveksiyon, elektron yakalanmaları ve açısal momentum taşınımı sonucun bir Tip Ia süpernovası mı, yığılma kaynaklı çöküş mü, yoksa bağlı bir artık mı olacağını belirler. Chandrasekhar kütlesi merkezî önemi korur; çünkü dejenerasyon tarafından desteklenen karbon–oksijen maddesinin termonükleer parçalanmaya karşı küresel olarak kararsızlaştığı doğal kütle ölçeğini belirler.

9. Sonuç

Chandrasekhar sınırı, basit fakat derin bir argümanlar zincirinden çıkar. Pauli dışarlama elektron momentum durumlarının yoğunluğunu belirler ve

$$p_F = \hbar(3\pi^2 n_e)^{1/3}. \quad (137)$$

sonucunu verir. Basınç izotropik momentum akısıdır:

$$P = \frac{1}{3} \int_0^{p_F} p v(p) n(p) dp, \quad (138)$$

bu da relativistik olmayan elektronlar için $P \propto n_e^{5/3}$ ve ultra-relativistik elektronlar için $P \propto n_e^{4/3}$ verir. Tam Chandrasekhar hâl denklemi, bu limitleri (39) içindeki $f(x)$ fonksiyonu aracılığıyla düzgün biçimde birbirine bağlar.

Hidrostatik dengeye yerleştirildiğinde, relativistik olmayan hâl denklemi $n = 3/2$ politropunu ve ters kütle–yarıçap yasası $R \propto M^{-1/3}$ sonucunu üretir. Ultra-relativistik hâl denklemi ise kütlesi yarıçaptan bağımsız olan bir $n = 3$ politropu üretir. Lane–Emden problemini çözmek ideal sınır kütleli verir:

$$M_{\text{Ch}} = 5.83 \mu_e^{-2} M_{\odot}, \quad (139)$$

ya da $\mu_e = 2$ için $1.457 M_{\odot}$. Bu sonuç, kuantum mekaniğin ve göreliliğin astrofiziğe uygulanmasının büyük nicel başarılarından biridir. İdeal varsayımları gerçek beyaz cücelerde Coulomb fiziği, ters beta bozunumu, sonlu sıcaklık, dönme, manyetik alanlar ve genel görelilik tarafından değiştirilir; fakat temel kütle ölçeği aynı kalır. Beyaz cücelerin $0.6 M_{\odot}$ civarındaki gözlenen yoğunlaşması yıldız evrimini yansıtırken, Chandrasekhar kütlesi yüksek-kütle uç noktasını ve Tip Ia süpernova öncüllerinin fiziğini yönetir.

A. Basınç İntegrali için Ayrıntılı Cebir

Bu ek, (36) içindeki kapalı biçime götüren adımları kaydeder. Şunu tanımlayalım:

$$I(x) = \int_0^x \frac{y^4 dy}{(1 + y^2)^{1/2}}. \quad (140)$$

Aşağıdaki değişken dönüşümünü kullanın:

$$y = \sinh t, \quad dy = \cosh t \, dt. \quad (141)$$

O zaman $(1 + y^2)^{1/2} = \cosh t$ olur ve

$$I(x) = \int_0^{\sinh^{-1} x} \sinh^4 t \, dt. \quad (142)$$

Özdeşlik

$$\sinh^4 t = \frac{1}{8} \cosh 4t - \frac{1}{2} \cosh 2t + \frac{3}{8} \quad (143)$$

şunu verir:

$$I(x) = \left[\frac{1}{32} \sinh 4t - \frac{1}{4} \sinh 2t + \frac{3}{8} t \right]_0^{\sinh^{-1} x}. \quad (144)$$

$$\sinh 2t = 2x(1 + x^2)^{1/2}, \quad (145)$$

ve

$$\sinh 4t = 4x(1 + 2x^2)(1 + x^2)^{1/2}, \quad (146)$$

ile, (144) denklemi

$$I(x) = \frac{1}{8} x(2x^2 - 3)(1 + x^2)^{1/2} + \frac{3}{8} \sinh^{-1} x, \quad (147)$$

biçimine gelir; bu da (36) denklemdir.

Chandrasekhar fonksiyonunun türevi özellikle basittir:

$$f'(x) = 8 \frac{x^4}{(1 + x^2)^{1/2}}. \quad (148)$$

Bu, ya (39) denklemini doğrudan türevleyerek ya da (140) denklemini türevleyerek elde edilir. Sertlik formülü (42) içinde kullanılan özdeşlik budur.

B. Merkez Yakınında Lane–Emden Denkleminin Seri Çözümü

Lane–Emden denkleminin sayısal integrasyonları küçük fakat sıfır olmayan ξ değerinden başlar; çünkü (51) görünürde tekil $1/\xi^2$ çarpanını içerir. Merkezde düzgünlük tekilliği kaldırır. Şöyle yazalım:

$$\theta(\xi) = 1 + a_2 \xi^2 + a_4 \xi^4 + O(\xi^6). \quad (149)$$

O zaman

$$\theta'(\xi) = 2a_2 \xi + 4a_4 \xi^3 + O(\xi^5), \quad (150)$$

ve

$$\frac{1}{\xi^2} \frac{d}{d\xi} (\xi^2 \theta') = 6a_2 + 20a_4 \xi^2 + O(\xi^4). \quad (151)$$

Sağ taraf

$$-\theta^n = -1 - na_2 \xi^2 + O(\xi^4). \quad (152)$$

şeklinde. Katsayıları eşitlemek

$$a_2 = -\frac{1}{6}, \quad a_4 = \frac{n}{120}. \quad (153)$$

sonucunu verir. Dolayısıyla düzgün merkez açılımı

$$\theta(\xi) = 1 - \frac{\xi^2}{6} + \frac{n\xi^4}{120} + O(\xi^6). \quad (154)$$

şeklinde. Bu açılım ξ_1 ve $\theta'(\xi_1)$ değerlerini hesaplamak için kararlı başlangıç değerleri sağlar.

Kütle özdeşliği (56), (51) denklemini ξ^2 ile çarparak elde edilir:

$$\frac{d}{d\xi} (\xi^2 \theta') = -\xi^2 \theta^n. \quad (155)$$

Merkezden yüzeye kadar integre etmek

$$[\xi^2 \theta']_0^{\xi_1} = - \int_0^{\xi_1} \xi^2 \theta^n d\xi. \quad (156)$$

sonucunu verir. Merkez sınır koşulu alt limiti sıfır yapar, dolayısıyla

$$\int_0^{\xi_1} \xi^2 \theta^n d\xi = -\xi_1^2 \theta'(\xi_1). \quad (157)$$

Bu, yoğunluk integralini kompakt kütle formülü (57) içine dönüştüren bağıntıdır.

Kaynaklar

- [1] B. W. Carroll and D. A. Ostlie, *An Introduction to Modern Astrophysics*, 2. baskı, Pearson Addison-Wesley, San Francisco (2007).
- [2] R. H. Fowler, "On dense matter," *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* **87**, 114–122 (1926).
- [3] E. C. Stoner, "The equilibrium of dense stars," *Philosophical Magazine* **9**, 944–963 (1930).
- [4] S. Chandrasekhar, "The maximum mass of ideal white dwarfs," *Astrophysical Journal* **74**, 81–82 (1931).
- [5] S. Chandrasekhar, "The highly collapsed configurations of a stellar mass," *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* **95**, 207–225 (1935).
- [6] S. Chandrasekhar, *An Introduction to the Study of Stellar Structure*, University of Chicago Press, Chicago (1939).
- [7] A. S. Eddington, *The Internal Constitution of the Stars*, Cambridge University Press, Cambridge (1926).
- [8] T. Hamada and E. E. Salpeter, "Models for zero-temperature stars," *Astrophysical Journal* **134**, 683–698 (1961).
- [9] E. E. Salpeter, "Energy and pressure of a zero-temperature plasma," *Astrophysical Journal* **134**, 669–682 (1961).
- [10] R. Kippenhahn, A. Weigert, and A. Weiss, *Stellar Structure and Evolution*, 2. baskı, Springer, Berlin (2012).

- [11] S. L. Shapiro and S. A. Teukolsky, *Black Holes, White Dwarfs, and Neutron Stars*, Wiley, New York (1983).
- [12] C. W. Misner, K. S. Thorne, and J. A. Wheeler, *Gravitation*, W. H. Freeman, San Francisco (1973).
- [13] S. Weinberg, *Gravitation and Cosmology*, Wiley, New York (1972).
- [14] K. Nomoto, "Accreting white dwarf models for Type I supernovae. I. Presupernova evolution and triggering mechanisms," *Astrophysical Journal* **253**, 798–810 (1982).
- [15] M. Nauenberg, "Analytic approximations to the mass-radius relation and energy of zero-temperature stars," *Astrophysical Journal* **175**, 417–429 (1972).