



EKSTREM FIZİK

Genel Görelilik Altında Tolman-Oppenheimer-Volkoff (TOV) Denge Denkleminin Türetimi ve Nötron Yıldızı Yapısı

Akademik Araştırma Makalesi

Teorik Astrofizik — Adım Adım Analitik Türetimler, Vektör Diyagramları ve Sayısal Tablolar

Genel Görelilik Altında Tolman-Oppenheimer-Volkoff (TOV) Denge Denkleminin Türetimi ve Nötron Yıldızı Yapısı

Ekstrem Fizik

Eylül 2026

Özet. Tolman–Oppenheimer–Volkoff denklemi, statik, küresel, mükemmel-akışkan bir yıldız için hidrostatik denge-nin görelî denklemdir. Basınç gradyanları ile kütleçekim kuvveti arasındaki Newtoncu dengeyi; enerji yoğunluğu, basınç ve uzayzaman eğriliğinin birbirinden ayrılamaz olduğu eğri uzayzamanda geometrik bir denge ile değiştirir. Bu makalede statik küresel simetrik metrikten, mükemmel-akışkan gerilme-enerji tensöründen, Einstein alan denklemlerinden ve yerel gerilme-enerji korunumundan başlayarak kendi içinde bütünlüklü bir türetim verilmektedir. Kütle denklemi, kütleçekim potansiyeli denklemi ve basınç denklemi, Einstein tensörünün tt ve rr bileşenlerinden ve $\nabla_\mu T^{\mu r} = 0$ bağıntısından açıkça elde edilir. Bunların birleştirilmesi, üç görelî düzeltmesini—basınç eylemsizliği, basıncın öz-kütleçekimi ve eğrilik yükseltmesi—sergileyen çarpanlara ayrılmış biçimde TOV denklemini verir. Ayrıca düzgün yoğunluklu Schwarzschild iç çözümünü, merkez basıncının ıraksamasını ve Buchdahl sınırını türetiyoruz. Ek bölümlerde uygulama için yararlı boyutsuz biçimler, sayısal kestirimler, gözlemsel tanılayıcılar ve cebirsel ayrıntılar verilmektedir. Nötron yıldızı yapısına, hal denklemlerine, kompaktlığa, kütleçekimsel kırmızıya kaymaya, sayısal integrasyona, bağlanma enerjisine ve gözlenen iki Güneş kütleli pulsarlara uygulamalar tartışılmaktadır.

Anahtar Kelimeler: Tolman–Oppenheimer–Volkoff denklemi; nötron yıldızları; genel görelilik; hidrostatik denge; kompaktlık; hal denklemi

1. Giriş

Yıldız dengesi problemi, astrofiziğin merkezi düzenleyici problemlerinden biridir. Newtoncu kuramda, statik küresel bir yıldız iki temel bağıntı ile betimlenir: kuşatılan kütle $m(r)$ yerel kütle yoğunluğuna göre artar ve basınç gradyanı birim hacim başına kütleçekim kuvvetini dengeler. Bu denklemler, enerji taşınımı ve bir hal denklemi ile tamamlandıklarında sıradan yıldızlar için yeterlidir [1, 10]. Kavramsal basitlikleri derin bir sınırlılığı gizler: kütleçekim madde üzerinde etkileyen dışsal bir kuvvet olarak ele alınırken, basınç yalnızca mekanik desteğe katkıda bulunur. Beyaz cüceler, nötron yıldızları ve varsayımsal aşırı-kompakt cisimler için bu ayrım geçersiz olur. Kütleçekim alanı artık zayıf değildir, iç hızlar görelî olabilir ve iç basınç durgun-kütle enerji yoğunluğu ile karşılaştırılabilir düzeydedir. Hidrostatik denge bu durumda genel görelilikten türetilmelidir.

Tarihsel olarak, görelî yıldız-yapısı denklemi Schwarzschild dış çözümünden kısa süre sonra geliştirilmiştir. İç sabit-yoğunluk çözümü 1916'da Schwarzschild tarafından bulunmuştur [2]; Tolman görelî akışkan kürelerini sistematikleştirmiştir [3]; Oppenheimer ve Volkoff ise kuramı soğuk nötron maddesine uygulayarak ilk görelî nötron yıldızı modellerini elde etmişlerdir [4]. Ortaya çıkan denklem bugün Tolman–Oppenheimer–Volkoff (TOV) denklemi olarak adlandırılır. Bu denklem kompakt-cisim astrofiziğinin, nükleer astrofiziğin ve güçlü-alan kütleçekiminin temel taşlarından biridir [6, 7, 8].

Nötron yıldızları TOV dengesinin en önemli fiziksel gerçekleşmesini sağlar. Kütlesi $M \approx 1.4 M_\odot$ ve yarıçapı $R \approx 10\text{--}14\text{ km}$ olan bir nötron yıldızının kompaktlığı $GM/(Rc^2) \sim 0.15\text{--}0.25$, yüzey kütleçekimi 10^{12} m s^{-2} değerinin üzerinde ve ortalama yoğunluğu nükleer do-

yum yoğunluğu mertebesinde. Bu rejimde basınç, enerji yoğunluğunun önemli bir kesri olabilir ve görelî düzeltmeler pertürbatif ayrıntılar değildir. Bunlar bir hal denkleminin iki Güneş kütleli bir yıldız destekleyip destekleyemeyeceğini ve kara deliğe çöküşün kaçınılmaz olup olmadığını belirler.

Bu makalenin amacı, TOV denklemini ileri düzey lisans ve lisansüstü astrofizik için uygun, eksiksiz fakat öğretici bir biçimde türetmektir. Türetim statik küresel metrikle başlar:

$$ds^2 = -e^{2\Phi(r)}c^2 dt^2 + \left(1 - \frac{2Gm(r)}{rc^2}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2, \quad (1)$$

burada

$$d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2. \quad (2)$$

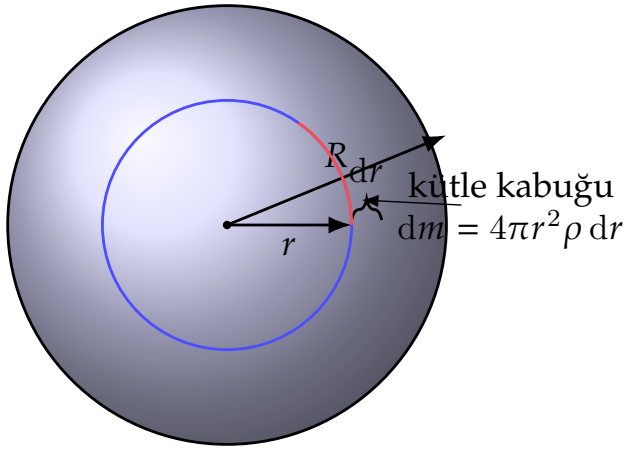
$m(r)$ fonksiyonu alan yarıçapı r içinde kuşatılan kütleçekimsel kütleye dönüşecek, $\Phi(r)$ ise logaritmik kütleçekimsel kırmızıya kayma potansiyelidir.

Temel mesaj, TOV denkleminin görelî terimlerin elle eklenmesiyle elde edilmediğidir. Denklem iki ilkeden çıkar: Einstein denklemleri eğriliği gerilme-enerji tensöründen belirler ve yerel gerilme-enerji korunumu kuvvet dengesini belirler. Newtoncu limitte denklem bilinen hidrostatik denge denkleminin düzgün biçimde indirgenir; ancak görelî rejimde açık fiziksel anlamlara sahip üç düzeltme çarpanı içerir.

2. Fiziksel ve Matematiksel Çerçeve

2.1. Statik küresel geometri

Zamandan bağımsız, küresel simetrik ve dönmeden, manyetik gerilmelerden, anizotropik gerilmelerden ve



$$g_{tt} = -e^{2\Phi(r)}c^2$$

$$g_{rr} = \left(1 - \frac{2Gm(r)}{rc^2}\right)^{-1}$$

Şekil 1. Statik küresel görel bir yıldızın şematik gösterimi. r koordinatı alan yarıçapıdır; dolayısıyla bir kürenin alanı $4\pi r^2$ olur. $\Phi(r)$ ve $m(r)$ metrik fonksiyonları kütleye kodlar. $\Phi(r)$ ve $m(r)$ metrik fonksiyonları kütleye kodlar.

ısı akısından arınmış bir uzayzaman varsayıyoruz. En genel statik küresel çizgi elemanı önce

$$ds^2 = -e^{2\Phi(r)}c^2 dt^2 + e^{2\Lambda(r)}dr^2 + r^2 d\Omega^2. \quad (3)$$

biçiminde yazılabilir. r koordinatı alan yarıçapı olarak seçilir:

$$A(r) = 4\pi r^2. \quad (4)$$

Kütle fonksiyonunu

$$e^{-2\Lambda(r)} = 1 - \frac{2Gm(r)}{rc^2}. \quad (5)$$

ile tanımlamak yararlıdır. (5) ifadesinin (3) içine konması (1) ifadesini verir.

$$C(r) = \frac{Gm(r)}{rc^2} \quad (6)$$

niceliği yerel kompaktlıktır. $C \ll 1$ olduğunda uzayzaman eğriliği zayıftır ve Newtoncu kütleçekim geri kazanılır.

Tanım 1. Statik küresel bir yıldız için yıldız yüzeyi R ,

$$P(R) = 0, \quad (7)$$

ile tanımlanır ve sonsuzdaki bir gözlemci tarafından ölçülen kütleçekimsel kütle

$$M = m(R). \quad (8)$$

olur.

Orijindeki düzenlilik, kimi zaman örtük bırakılan ek koşullar dayatır. Merkez bir sınır yüzeyi değil, yerel olarak düz bir nokta olduğundan, kuşatılan kütle r' den daha hızlı sıfıra girmelidir:

$$m(0) = 0, \quad \lim_{r \rightarrow 0} \frac{m(r)}{r} = 0. \quad (9)$$

Metrik katsayısı g_{rr} bire yaklaşmalıdır; bu da

$$e^{2\Lambda(0)} = 1. \quad (10)$$

sonucunu verir. Sonlu merkez basıncı ve yoğunluğu

$$P(0) = P_c < \infty, \quad \rho(0) = \rho_c < \infty. \quad (11)$$

gerektirir. Küresel simetri ayrıca skaler gradyanların merkezde yok olmasını gerektirir:

$$P'(0) = 0, \quad \rho'(0) = 0. \quad (12)$$

Bu koşullar hem analitik hem de sayısal olarak yararlıdır; çünkü diferansiyel denklemlerin tekil olmayan dalını belirlerler.

Yıldızın dışında $P = \rho = 0$ olur ve metrik Schwarzschild dış çözümüyle eşleşmelidir:

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right)c^2 dt^2 + \left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2. \quad (13)$$

$r = R$ konumunda g_{tt} sürekliliği

$$e^{2\Phi(R)} = 1 - \frac{2GM}{Rc^2}. \quad (14)$$

sonucunu verir.

2.2. Mükemmel-akışkan madde

Bir mükemmel akışkanın gerilme-enerji tensörü

$$T^{\mu\nu} = \left(\rho + \frac{P}{c^2}\right)u^\mu u^\nu + P g^{\mu\nu}, \quad (15)$$

şeklindedir; burada ρ kütle-enerji yoğunluğudur, böylece yerel enerji yoğunluğu $\epsilon = \rho c^2$ olur; P izotropik basıncıdır ve u^μ dört-hızdır. Normlama koşulu

$$g_{\mu\nu}u^\mu u^\nu = -c^2. \quad (16)$$

şeklindedir. (1) koordinatlarında statik bir akışkan için

$$u^r = u^\theta = u^\phi = 0. \quad (17)$$

(1) ve (16) kullanılırsa,

$$-e^{2\Phi}c^2(u^t)^2 = -c^2, \quad (18)$$

dolayısıyla

$$u^t = e^{-\Phi}. \quad (19)$$

Gerilme-enerji tensörünün karışık bileşenleri bu nedenle

$$T^\mu{}_\nu = \text{diag}(-\rho c^2, P, P, P). \quad (20)$$

olur.

Not 1. Denklem (20) aldatıcı biçimde basittir. İlk bileşeni enerji yoğunluğunun eğriliğin kaynağı olduğunu; uzaysal bileşenleri ise basıncın da eğriliğin kaynağı olduğunu söyler. Bu olgunun Newtoncu bir benzeri yoktur ve kompakt yıldız yapısı için merkezî önemlidir.

2.3. Einstein denklemleri

İşaret konvansiyonunu

$$G_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}. \quad (21)$$

olarak alıyoruz. Eşdeğer biçimde, karışık bileşenler için

$$G^\mu{}_\nu = \frac{8\pi G}{c^4} T^\mu{}_\nu. \quad (22)$$

Küresel denge için gereken iki bileşen tt ve rr denklemleridir. Bunlar sırasıyla $m'(r)$ ve $\Phi'(r)$ niceliklerini belirler. Basınç gradyanı daha sonra yerel korunumdan gelir:

$$\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0. \quad (23)$$

3. tt Alan Denkleminde Kütle Denklemi

(3) metriği için Einstein tensörünün karışık zaman bileşeni

$$G^t{}_t = -\frac{1}{r^2} + e^{-2\Lambda} \left(\frac{1}{r^2} - \frac{2\Lambda'}{r} \right). \quad (24)$$

şeklinde. Burada ve aşağıda üs işareti d/dr anlamına gelir. (5) kullanılırsa,

$$e^{-2\Lambda} = 1 - \frac{2Gm}{rc^2}. \quad (25)$$

(25) ifadesinin türevi

$$-2\Lambda' e^{-2\Lambda} = -\frac{2G}{c^2} \left(\frac{m'}{r} - \frac{m}{r^2} \right). \quad (26)$$

verir. Dolayısıyla

$$e^{-2\Lambda} \Lambda' = \frac{G}{c^2} \left(\frac{m'}{r} - \frac{m}{r^2} \right). \quad (27)$$

(24) içine konduğunda

$$\begin{aligned} G^t{}_t &= -\frac{1}{r^2} + \frac{1}{r^2} \left(1 - \frac{2Gm}{rc^2} \right) - \frac{2}{r} e^{-2\Lambda} \Lambda' \\ &= -\frac{2Gm}{r^3 c^2} - \frac{2G}{c^2} \left(\frac{m'}{r^2} - \frac{m}{r^3} \right) \\ &= -\frac{2Gm'}{c^2 r^2}. \end{aligned} \quad (28)$$

(20) ile birlikte alan denklemi (22),

$$G^t{}_t = -\frac{8\pi G}{c^2} \rho. \quad (29)$$

sonucunu verir. (28) ve (29) eşitlenirse görelî kütle denklemi elde edilir:

$$\frac{dm}{dr} = 4\pi r^2 \rho. \quad (30)$$

Merkezden integrasyonla,

$$m(r) = 4\pi \int_0^r \rho(\tilde{r}) \tilde{r}^2 d\tilde{r}. \quad (31)$$

Öz radyal uzaklık koordinat artımından farklıdır:

$$d\ell = \left(1 - \frac{2Gm}{rc^2} \right)^{-1/2} dr. \quad (32)$$

Dolayısıyla ince bir kabuğun öz hacmi

$$dV_{\text{prop}} = 4\pi r^2 \left(1 - \frac{2Gm}{rc^2} \right)^{-1/2} dr. \quad (33)$$

ρ_0 durgun-kütle yoğunluğunu gösteriyorsa, r içindeki baryonik durgun kütle bu nedenle

$$m_b(r) = 4\pi \int_0^r \rho_0(\tilde{r}) \left(1 - \frac{2Gm}{\tilde{r}c^2} \right)^{-1/2} \tilde{r}^2 d\tilde{r}. \quad (34)$$

olur. Korunan baryon sayısı belirtildiğinde $m_b(R)$ ile M arasındaki fark, kütleçekimsel bağlanmayı nicelendirmek için koordinat-değişmez bir yoldur.

Not 2. (30) Newtoncu görünse de yorumu görelidir. ρ yoğunluğu yerel enerji yoğunluğunun c^2 'ye bölünmüş hâlidir; $m(r)$ ise eğrilik bileşeni g_{rr} içinde görünen kütleçekimsel kütledir. Öz hacim $(1 - 2Gm/rc^2)^{-1/2}$ çarpımını içerir; bu yüzden $m(r)$ yalnızca yoğunluğun öz hacim üzerinde integrali değildir. Kütleçekimsel bağlanma enerjisi zaten geometrik olarak kodlanmıştır.

4. rr Alan Denkleminde Potansiyel Denklemi

(3) için Einstein tensörünün karışık radyal bileşeni

$$G^r{}_r = -\frac{1}{r^2} + e^{-2\Lambda} \left(\frac{1}{r^2} + \frac{2\Phi'}{r} \right). \quad (35)$$

şeklinde. (5) kullanılırsa bu

$$\begin{aligned} G^r{}_r &= -\frac{1}{r^2} + \left(1 - \frac{2Gm}{rc^2} \right) \left(\frac{1}{r^2} + \frac{2\Phi'}{r} \right) \\ &= -\frac{2Gm}{r^3 c^2} + \frac{2\Phi'}{r} \left(1 - \frac{2Gm}{rc^2} \right). \end{aligned} \quad (36)$$

olur. Kaynak terimi

$$G^r{}_r = \frac{8\pi G}{c^4} P. \quad (37)$$

şeklinde. (36) ve (37) eşitlenirse,

$$-\frac{2Gm}{r^3 c^2} + \frac{2\Phi'}{r} \left(1 - \frac{2Gm}{rc^2} \right) = \frac{8\pi GP}{c^4}. \quad (38)$$

Adım adım çözerek,

$$\frac{2\Phi'}{r} \left(1 - \frac{2Gm}{rc^2} \right) = \frac{2Gm}{r^3 c^2} + \frac{8\pi GP}{c^4}, \quad (39)$$

ve dolayısıyla

$$\Phi' = \frac{Gm}{r^2 c^2} \left(1 - \frac{2Gm}{rc^2} \right)^{-1} + \frac{4\pi GPr}{c^4} \left(1 - \frac{2Gm}{rc^2} \right)^{-1}. \quad (40)$$

elde edilir. İki terimin birleştirilmesi

$$\frac{d\Phi}{dr} = \frac{G(m + 4\pi r^3 P/c^2)}{c^2 r^2 (1 - 2Gm/(rc^2))}. \quad (41)$$

sonucunu verir.

Not 3. (41) payı $m + 4\pi r^3 P/c^2$ içerir. Bu nedenle basınç kütleçekim potansiyeli gradyanına doğrudan katkı yapar. Görelî kütleçekimde basınç yalnızca kütleçekime karşı destek değildir; aynı zamanda kütleçekimin kaynağıdır.

Newtoncu birimlere sahip bir potansiyel tanıtmak ki-mi zaman yararlıdır:

$$\varphi(r) = c^2 \Phi(r). \quad (42)$$

Bu durumda (41)

$$\frac{d\varphi}{dr} = \frac{G(m + 4\pi r^3 P/c^2)}{r^2 (1 - 2Gm/(rc^2))}. \quad (43)$$

biçimine gelir. Zayıf-alan ve düşük-basınç limitinde bu

$$\frac{d\varphi}{dr} \simeq \frac{Gm}{r^2}, \quad (44)$$

olağan Newtoncu kütleçekim ivmesine indirgenir.

5. Gerilme-Enerji Korunumu ve Hidrostatik Denge

Einstein denklemleri, büzülmüş Bianchi özdeşliği aracılığıyla yerel gerilme-enerji korunumunu gerektirir. Bununla birlikte, radyal bileşenin açıkça türetilmesi hidrostatik denkleme giden en açık yoldur. Korunum denklemi

$$\nabla_\mu T^{\mu r} = \partial_\mu T^{\mu r} + \Gamma^\mu_{\mu\alpha} T^{\alpha r} + \Gamma^r_{\mu\alpha} T^{\mu\alpha} = 0. \quad (45)$$

şeklinde-dir. Durgun statik bir mükemmel akışkan için sıfır olmayan tek köşegen kontravaryant bileşenler

$$T^{tt} = \rho e^{-2\Phi}, \quad T^{rr} = P g^{rr}, \quad T^{\theta\theta} = \frac{P}{r^2}, \quad T^{\phi\phi} = \frac{P}{r^2 \sin^2\theta}. \quad (46)$$

şeklinde-dir. İlgili Christoffel sembolleri

$$\Gamma^t_{tr} = \Phi', \quad \Gamma^r_{tt} = c^2 e^{2\Phi-2\Lambda} \Phi', \quad (47)$$

$$\Gamma^r_{rr} = \Lambda', \quad \Gamma^\theta_{\theta r} = \Gamma^\phi_{\phi r} = \frac{1}{r}, \quad (48)$$

ve

$$\Gamma^r_{\theta\theta} = -r e^{-2\Lambda}, \quad \Gamma^r_{\phi\phi} = -r \sin^2\theta e^{-2\Lambda}. \quad (49)$$

şeklinde-dir. $T^{\mu r}$ yalnızca $\mu = r$ için sıfır olmadığından, (45) içindeki ilk iki terim

$$\partial_\mu T^{\mu r} + \Gamma^\mu_{\mu\alpha} T^{\alpha r} = \frac{d}{dr} (P e^{-2\Lambda}) + \left(\Phi' + \Lambda' + \frac{2}{r} \right) P e^{-2\Lambda}. \quad (50)$$

verir. Son terim

$$\Gamma^r_{\mu\alpha} T^{\mu\alpha} = \Gamma^r_{tt} T^{tt} + \Gamma^r_{rr} T^{rr} + \Gamma^r_{\theta\theta} T^{\theta\theta} + \Gamma^r_{\phi\phi} T^{\phi\phi}$$

$$= \rho c^2 e^{-2\Lambda} \Phi' + \Lambda' P e^{-2\Lambda} - \frac{2P}{r} e^{-2\Lambda}. \quad (51)$$

sonucunu verir. Radyal türev açılırsa,

$$\frac{d}{dr} (P e^{-2\Lambda}) = e^{-2\Lambda} P' - 2\Lambda' P e^{-2\Lambda}. \quad (52)$$

(50)–(52) ifadeleri (45) içine konduğunda, tüm Λ' ve $2P/r$ terimleri birbirini götürür ve

$$e^{-2\Lambda} [P' + (\rho c^2 + P)\Phi'] = 0. \quad (53)$$

kalır. Bu nedenle

$$\frac{dP}{dr} = -(\rho c^2 + P) \frac{d\Phi}{dr}. \quad (54)$$

(42) kullanılarak bu

$$\frac{dP}{dr} = -\left(\rho + \frac{P}{c^2}\right) \frac{d\varphi}{dr}. \quad (55)$$

biçiminde de yazılabilir.

Not 4. Denklem (55), Newtoncu hidrostatik dengenin tam görelî benzeridir. İvmeye direnen eylemsiz kütle yoğunluğu ρ değil, $\rho + P/c^2$ olur. Basınç kütleçekime olduğu kadar eylemsizliğe de katkıda bulunur.

Aynı sonucu ifade etmenin özlü bir yolu, statik bir akışkan elemanın dört-ivmesidir:

$$a^\mu = u^\nu \nabla_\nu u^\mu. \quad (56)$$

(3) metriği için radyal bileşen

$$a^r = c^2 e^{-2\Lambda} \Phi'. \quad (57)$$

olur. $\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0$ ifadesinin $u^{\mu\nu}$ 'ye dik izdüşümünden elde edilen Euler denklemi

$$(\rho c^2 + P) a_\alpha + \left(g_\alpha{}^\mu + \frac{u_\alpha u^\mu}{c^2} \right) \nabla_\mu P = 0. \quad (58)$$

şeklinde-dir. $\alpha = r$ alınması (54) sonucunu verir. Bu biçim, hidrostatik dengenin her akışkan elemanın anlık durgun çerçevesinde yerel kuvvet dengesi olduğunu açıkça gösterir.

6. Tolman–Oppenheimer–Volkoff Denklemi

(41) ifadesinin (54) içine konması

$$\frac{dP}{dr} = -(\rho c^2 + P) \frac{G(m + 4\pi r^3 P/c^2)}{c^2 r^2 (1 - 2Gm/(rc^2))}. \quad (59)$$

sonucunu verir. Eşdeğer olarak,

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{Gm\rho}{r^2} \left(1 + \frac{P}{\rho c^2} \right) \left(1 + \frac{4\pi r^3 P}{mc^2} \right) \left(1 - \frac{2Gm}{rc^2} \right)^{-1}. \quad (60)$$

$$\frac{dm}{dr} = 4\pi r^2 \rho, \quad (61)$$

ve bir hal denklemi

$$P = P(\rho), \quad (62)$$

ile birlikte (60) denklemi soğuk küresel görel bir yıldızın yapısını belirler.

(60) içindeki üç düzeltme çarpanı

$$I = 1 + \frac{P}{\rho c^2}, \quad (63)$$

$$S = 1 + \frac{4\pi r^3 P}{mc^2}, \quad (64)$$

ve

$$G = \left(1 - \frac{2Gm}{rc^2}\right)^{-1}. \quad (65)$$

şeklindedir. Böylece

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{Gm\rho}{r^2} I S G. \quad (66)$$

Newtoncu limit,

$$\frac{P}{\rho c^2} \ll 1, \quad \frac{4\pi r^3 P}{mc^2} \ll 1, \quad \frac{2Gm}{rc^2} \ll 1. \quad (67)$$

varsayımlarıyla elde edilir. Bu durumda

$$I \simeq S \simeq G \simeq 1, \quad (68)$$

ve (60)

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{Gm\rho}{r^2}. \quad (69)$$

biçimine gelir. (30) ile birlikte bu, yıldızsal hidrostatik dengenin olağan denklemidir.

7. Boyutsuz Biçim ve Ölçekleme

Sayısal çalışmalar için büyük boyutlu sabitleri dışarı ölçeklemek yararlıdır. Karakteristik bir yoğunluk ρ_* seçip

$$r_* = \frac{c}{\sqrt{4\pi G \rho_*}}, \quad m_* = 4\pi \rho_* r_*^3. \quad (70)$$

tanımlayalım. Boyutsuz değişkenleri

$$x = \frac{r}{r_*}, \quad \mu = \frac{m}{m_*}, \quad p = \frac{P}{\rho_* c^2}, \quad e = \frac{\rho}{\rho_*}. \quad (71)$$

olarak tanıtalım. Bu durumda kütle denklemi

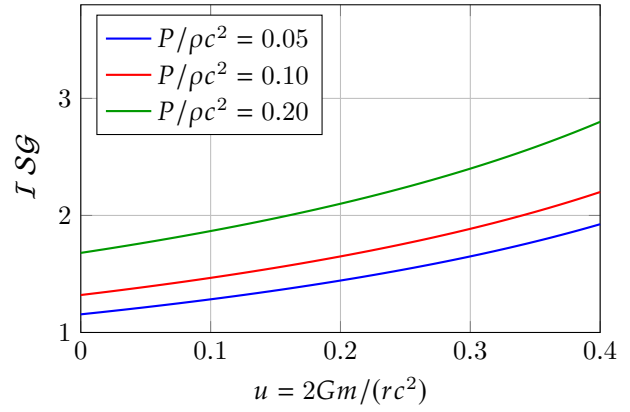
$$\frac{d\mu}{dx} = x^2 e. \quad (72)$$

olur. Kompaktlık çarpanı

$$\frac{2Gm}{rc^2} = \frac{2\mu}{x}. \quad (73)$$

şeklindedir. TOV basınç denklemi

$$\frac{dp}{dx} = -\frac{(e+p)(\mu+x^3p)}{x^2(1-2\mu/x)}. \quad (74)$$



Şekil 2. Üç temsili basınç düzeyi için yerel kompaktlık $u = 2Gm/(rc^2)$ fonksiyonu olarak birleşik TOV düzeltme çarpanı. Çizilen eğriler basit bir açıklayıcı ölçekleme olarak $4\pi r^3 P/(mc^2) = 2P/(\rho c^2)$ kullanır.

biçimine gelir. Potansiyel denklemi de benzer biçimde

$$\frac{d\Phi}{dx} = \frac{\mu + x^3 p}{x^2(1 - 2\mu/x)}. \quad (75)$$

olur. (72) ve (74) denklemleri, tüm boyutlu bilginin hal denklemi ve seçilen yoğunluk ölçeği aracılığıyla girdiğini gösterir. Örneğin,

$$\rho_* = 10^{18} \text{ kg m}^{-3}, \quad (76)$$

ise

$$r_* = 10.36 \text{ km}, \quad m_* = 6.98 M_\odot. \quad (77)$$

olur. Dolayısıyla boyutsuz kütle $\mu = 0.30$, $M \simeq 2.09 M_\odot$ değerine karşılık gelir.

Şekil 2, bir ufka yaklaşılmadan önce görel düzeltmelerin neden büyüdüğünü göstermektedir. $u = 0.35$ değerinde, ılımlı basınç oranları bile iki mertebesinde birleşik bir düzeltmeye yol açar. Bu davranış nötron yıldızı iç bölgeleri için tipiktir ve Newtoncu yıldız modellerinin belirli bir basınç profilinin sağladığı desteği neden fazla kestirdiğini açıklar.

8. Düzgün-Yoğunluklu Schwarzschild İç Çözümü

En basit tam görel yıldız sabit yoğunluğa sahiptir:

$$\rho(r) = \rho_0 = \text{constant}. \quad (78)$$

Kütle denklemi

$$m(r) = \frac{4\pi}{3} \rho_0 r^3. \quad (79)$$

verir. Yüzeyde,

$$M = \frac{4\pi}{3} \rho_0 R^3. \quad (80)$$

olur. Kompaktlık parametresini

$$\beta = \frac{GM}{Rc^2}. \quad (81)$$

Tablo 1. Newtoncu hidrostatik denge ile TOV denkleminin karşılaştırılması.

Nicelik	Newtoncu kuram	Görelî TOV kuramı
Kütle denklemi	$dm/dr = 4\pi r^2 \rho$	$dm/dr = 4\pi r^2 \rho$
Kuvvet yoğunluğu	$-Gm\rho/r^2$	$-(Gm\rho/r^2)\mathcal{I}\mathcal{S}\mathcal{G}$
Eylemsizlik düzeltmesi	1	$\mathcal{I} = 1 + P/(\rho c^2)$
Kütleçekim kaynağı olarak basınç	yok	$\mathcal{S} = 1 + 4\pi r^3 P/(mc^2)$
Eğrilik düzeltmesi	1	$\mathcal{G} = (1 - 2Gm/(rc^2))^{-1}$
Yüzey kırmızıya kayması	$z \simeq GM/(Rc^2)$	$z = (1 - 2GM/(Rc^2))^{-1/2} - 1$

olarak tanımlayalım. O hâlde

$$\frac{2Gm(r)}{rc^2} = 2\beta \frac{r^2}{R^2}. \quad (82)$$

TOV denklemi

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{G(\rho_0 + P/c^2)(4\pi\rho_0 r^3/3 + 4\pi r^3 P/c^2)}{r^2(1 - 8\pi G\rho_0 r^2/(3c^2))}. \quad (83)$$

biçimine gelir.

$$q(r) = \frac{P(r)}{\rho_0 c^2}. \quad (84)$$

tanımlamak uygundur. $M = 4\pi\rho_0 R^3/3$ kullanılırsa diferansiyel denklem

$$\frac{dq}{dr} = -\frac{4\pi G\rho_0 r(1+q)(1/3+q)}{c^2(1 - 2\beta r^2/R^2)}. \quad (85)$$

olur. $P(R) = 0$ koşulunu sağlayan tam çözüm

$$\frac{P(r)}{\rho_0 c^2} = \frac{\sqrt{1 - 2\beta r^2/R^2} - \sqrt{1 - 2\beta}}{3\sqrt{1 - 2\beta} - \sqrt{1 - 2\beta r^2/R^2}}. \quad (86)$$

şeklindedir. Dolayısıyla merkez basıncı

$$\frac{P_c}{\rho_0 c^2} = \frac{1 - \sqrt{1 - 2\beta}}{3\sqrt{1 - 2\beta} - 1}. \quad (87)$$

olur. Yıldız içindeki karşılık gelen kırmızıya kayma çarpanı

$$e^{\Phi(r)} = \frac{1}{2} \left[3\sqrt{1 - 2\beta} - \sqrt{1 - 2\beta r^2/R^2} \right]. \quad (88)$$

şeklindedir.

Önerme 1. İzotropik düzgün-yoğunluklu görelî bir yıldız için merkez basıncı yalnızca

$$3\sqrt{1 - 2\beta} > 1. \quad (89)$$

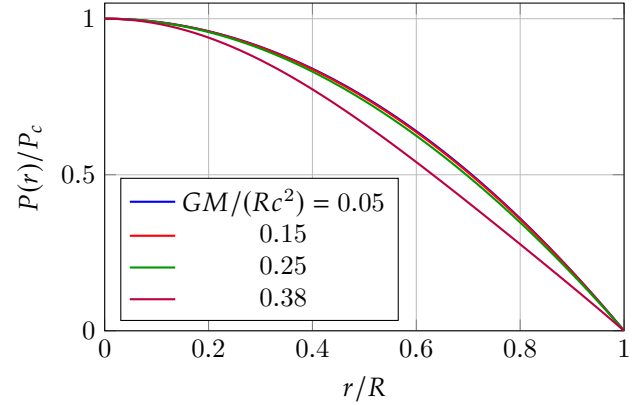
ise sonludur.

(89) çözülürse,

$$\sqrt{1 - 2\beta} > \frac{1}{3}, \quad (90)$$

dolayısıyla

$$1 - 2\beta > \frac{1}{9}, \quad (91)$$



Şekil 3. Düzgün-yoğunluklu Schwarzschild iç çözümü için merkez basıncına normalize edilmiş basınç profilleri. Kompaktlık arttıkça basınç desteği giderek daha fazla merkezde yoğunlaşır.

ve bundan

$$\beta < \frac{4}{9}. \quad (92)$$

elde edilir. Böylece

$$R > \frac{9GM}{4c^2}. \quad (93)$$

Bu, düzgün-yoğunluk modeli için ve izotropik basınç ile artmayan yoğunluk gibi daha genel varsayımlar altında görelî akışkan küreleri için Buchdahl sınırır [5].

Not 5. Buchdahl yarıçapı $R = 9GM/(4c^2)$, Schwarzschild yarıçapı $R_s = 2GM/c^2$ değerinden büyüktür. Statik bir mükemmel-akışkan yıldız, ıraksak basınç gerektirmeden olay ufkuyla keyfî ölçüde yakın sıkıştırılmaz.

Yüzeyde yayılan ve sonsuzda gözlenen bir fotonun kütleçekimsel kırmızıya kayması

$$1 + z_s = \left(1 - \frac{2GM}{Rc^2}\right)^{-1/2}, \quad (94)$$

veya

$$z_s = (1 - 2\beta)^{-1/2} - 1. \quad (95)$$

şeklindedir. Buchdahl limitinde (95)

$$z_s < 2. \quad (96)$$

sonucunu verir.

9. Hal Denklemleri ve Maksimum Kütle

TOV denklemi bir hal denklemi verilene kadar kapalı değildir. Soğuk nötron yıldızı maddesi için çoğunlukla

$$P = P(\epsilon), \quad \epsilon = \rho c^2. \quad (97)$$

yazılır. Yararlı bir yerel gösterim politropdur:

$$P = K\rho_0^\Gamma, \quad (98)$$

burada ρ_0 durgun-kütle yoğunluğu, K bir sertlik parametresi ve Γ adyabatik indextir. Göreli soğuk bir politrop için toplam enerji yoğunluğu

$$\epsilon = \rho_0 c^2 + \frac{P}{\Gamma - 1}. \quad (99)$$

ile yaklaşık olarak verilebilir. Ses hızı

$$c_s^2 = \frac{dP}{d\epsilon}. \quad (100)$$

şeklinde. Nedensellik

$$c_s^2 \leq c^2. \quad (101)$$

gerektirir. Eşdeğer olarak,

$$\frac{dP}{d\rho} \leq c^2. \quad (102)$$

(99) ile birlikte (98) politropik biçimi için durgun-kütle yoğunluğuna göre türev

$$\frac{dP}{d\rho_0} = \Gamma K \rho_0^{\Gamma-1} = \Gamma \frac{P}{\rho_0}. \quad (103)$$

olur. Karşılık gelen enerji-yoğunluğu türevi

$$\frac{d\epsilon}{d\rho_0} = c^2 + \frac{\Gamma}{\Gamma - 1} \frac{P}{\rho_0}. \quad (104)$$

şeklinde. Böylece

$$\frac{c_s^2}{c^2} = \frac{\Gamma P / (\rho_0 c^2)}{1 + \Gamma P / [(\Gamma - 1) \rho_0 c^2]}. \quad (105)$$

Yüksek basınçta bu

$$\lim_{P/(\rho_0 c^2) \rightarrow \infty} \frac{c_s^2}{c^2} = \Gamma - 1. \quad (106)$$

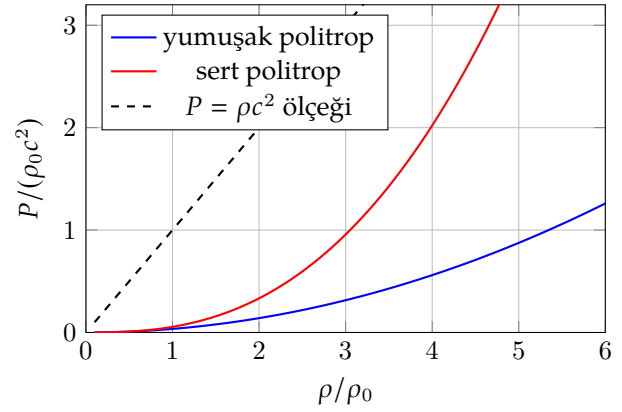
sınırına gider. Bu nedenle $\Gamma > 2$ olan tek bir politrop, sonlu bir aralıkta yararlı bir yerel uyum olabilse de keyfi yüksek yoğunlukta nedensel kalmaz.

Özgül göreli entalpi çoğu zaman yararlıdır:

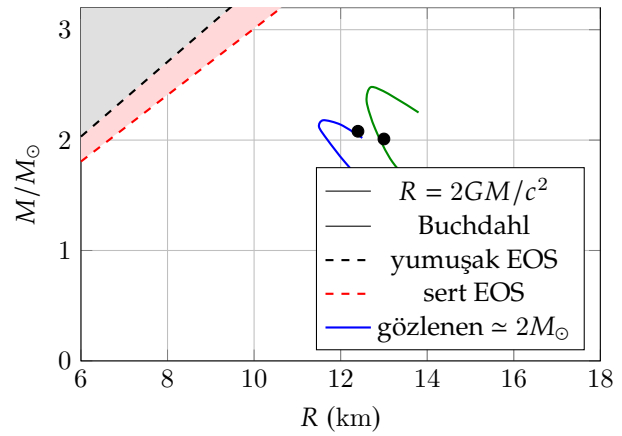
$$h(P) = \int_0^P \frac{dP'}{\epsilon(P') + P'}. \quad (107)$$

$\epsilon + P = \rho c^2 + P$ olduğundan, korunum denklemi

$$h(r) + \Phi(r) = \text{constant}. \quad (108)$$



Şekil 4. Nitel politropik hal denklemleri. Daha sert hal denklemleri belirli bir yoğunlukta daha yüksek basınç üretir ve genel olarak daha büyük maksimum kütleleri destekler; ancak eğim nedensel kalmalıdır.



Şekil 5. Yumuşak ve sert nötron yıldızı hal denklemleri için nitel kütle-yarıçap eğrileri. Her eğrinin bir maksimum kütle-si vardır. Gölge alanlar kara delik ve Buchdahl dışlama bölgelerini gösterir. Gözlenen iki Güneş kütleli pulsarlar, fiziksel eğrinin en az yaklaşık $2M_\odot$ değerine ulaşmasını gerektirir.

sonucunu verir. Bu bağıntı göreli yıldız modellemesinde sıklıkla kullanılır.

Merkez yoğunluğu ρ_c ile etiketlenen, dönmeyen yıldızlardan oluşan tek parametrelili bir dizi için kütle-kimse kütle

$$M = M(\rho_c). \quad (109)$$

şeklinde. Radyal kararsızlığın başlangıcı ilk maksimumda gerçekleşir:

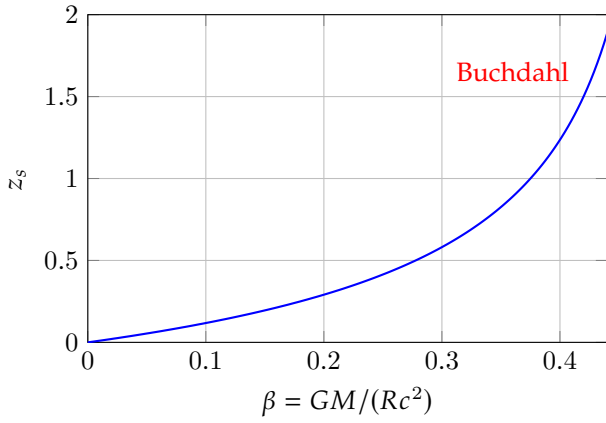
$$\frac{dM}{d\rho_c} = 0. \quad (110)$$

$$\frac{dM}{d\rho_c} > 0 \quad (111)$$

koşulunu sağlayan konfigürasyonlar normalde temel radyal moda karşı kararlıdır; maksimumun ötesindekiler ise kararsızdır.

Modern gözlemler, soğuk dönmeyen dizinin maksimum kütlelerinin hassas ölçülmüş pulsar kütlelerini aşmasını gerektirir. PSR J0348+0432

$$M = 2.01 \pm 0.04 M_\odot, \quad (112)$$



Şekil 6. Kompaktlığın fonksiyonu olarak yüzey kütleçekimsel kırmızıya kayması. Göreli kırmızıya kayma sıradan yıldızlar için küçüktür; ancak nötron yıldızları için doğrudan gözlemlenebilir bir güçlü-alan etkisidir.

kütlesine sahiptir ve PSR J0740+6620 kütlesi

$$M \simeq 2.08 M_{\odot}. \quad (113)$$

yakınındadır. Bu ölçümler, nükleer-üstü yoğunlukta fazla yumuşak olan hal denklemlerini dışlar [13, 14, 15]. Genel olarak, geçerli dönmeyen maksimum kütlelerin

$$M_{\max} \sim 2-3 M_{\odot}, \quad (114)$$

mertebesinde olması beklenir; kesin değer yüksek-yoğunluk hal denklemlerine bağlıdır [11, 12].

10. TOV Denklemlerinin Sayısal İntegrasyonu

Sayısal bir yıldız modeli, bir merkez yoğunluğu veya merkez basıncı belirtilerek elde edilir. Bağlaştık birinci mertebe sistem

$$\frac{dm}{dr} = 4\pi r^2 \rho(P), \quad (115)$$

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{Gm\rho(P)}{r^2} \left(1 + \frac{P}{\rho(P)c^2}\right) \left(1 + \frac{4\pi r^3 P}{mc^2}\right) \left(1 - \frac{2Gm}{rc^2}\right)^{-1}. \quad (116)$$

şeklinde. Merkez sınır koşulları

$$m(0) = 0, \quad P(0) = P_c. \quad (117)$$

olur. (116) ifadesi m/r^2 içerdiğinden, integrasyona seri açılımları kullanılarak küçük bir yarıçapta başlanır. Merkeze yakın,

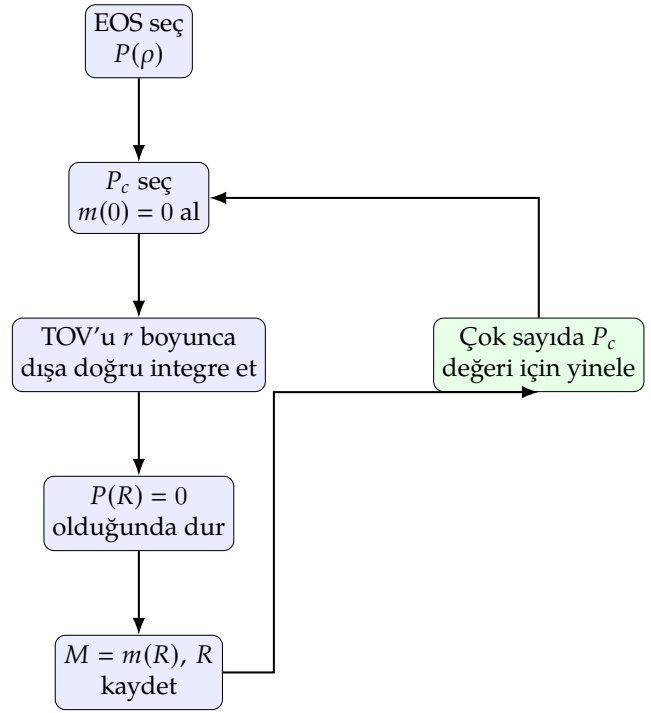
$$m(r) = \frac{4\pi}{3} \rho_c r^3 + O(r^5), \quad (118)$$

ve

$$P(r) = P_c - \frac{2\pi G}{3} (\rho_c + P_c/c^2)(\rho_c + 3P_c/c^2)r^2 + O(r^4). \quad (119)$$

olur. Yüzeye

$$P(R) = 0. \quad (120)$$



Şekil 7. Bir kütle-yarıçap dizisinin sayısal inşası. Merkez basıncı tek bir yıldız modelini etiketler; bunun değiştirilmesi denge eğrisini üretir ve maksimum kütleli ortaya çıkarır.

olduğunda ulaşılır. O zaman

$$M = m(R). \quad (121)$$

Kırmızıya kayma potansiyeli

$$\frac{d\Phi}{dr} = -\frac{1}{\rho c^2 + P} \frac{dP}{dr}, \quad (122)$$

denkleminde, sınır koşulu

$$\Phi(R) = \frac{1}{2} \ln \left(1 - \frac{2GM}{Rc^2}\right). \quad (123)$$

ile integre edilebilir.

Baryonik kütle kimi zaman kütleçekimsel kütleyle karşılaştırma için hesaplanır:

$$M_b = 4\pi \int_0^R \rho_0(r) \left(1 - \frac{2Gm(r)}{rc^2}\right)^{-1/2} r^2 dr. \quad (124)$$

Bağlanma enerjisi daha sonra

$$E_b = (M_b - M)c^2. \quad (125)$$

olur. Nötron yıldızları için E_b tipik olarak Mc^2 değerinin önemli bir kesridir ve konfigürasyonun güçlü kütleçekimini yansıtır.

11. Çözümlü Sayısal Uygulamalar

Yararlı sabitler

$$\frac{GM_{\odot}}{c^2} = 1.4766 \text{ km}, \quad M_{\odot} = 1.9885 \times 10^{30} \text{ kg}. \quad (126)$$

şeklinde.

11.1. Kütleli bir nötron yıldızının kompaktlığı ve kırmızıya kayması

$$M = 2.08 M_{\odot}, \quad R = 12.4 \text{ km.} \quad (127)$$

olan bir nötron yıldızı düşünelim. Kompaktlığı

$$\begin{aligned} \beta &= \frac{GM}{Rc^2} = \frac{1.4766 \text{ km}}{12.4 \text{ km}} (2.08) \\ &= 0.248. \end{aligned} \quad (128)$$

olur. Schwarzschild yarıçapı

$$R_s = 2\beta R = 6.15 \text{ km.} \quad (129)$$

şeklindedir. Yüzey kırmızıya kayması

$$\begin{aligned} z_s &= (1 - 2\beta)^{-1/2} - 1 \\ &= (1 - 0.496)^{-1/2} - 1 = 0.409. \end{aligned} \quad (130)$$

olur. Dolayısıyla yüzeyde E_e enerjisiyle yayılan bir foton sonsuzda

$$E_{\infty} = \frac{E_e}{1 + z_s} = 0.710 E_e. \quad (131)$$

enerjisiyle gözlenir.

Ortalama yoğunluk

$$\begin{aligned} \bar{\rho} &= \frac{3M}{4\pi R^3} \\ &= \frac{3(2.08)(1.9885 \times 10^{30} \text{ kg})}{4\pi(1.24 \times 10^4 \text{ m})^3} \\ &= 5.18 \times 10^{17} \text{ kg m}^{-3}. \end{aligned} \quad (132)$$

olur. Statik yerel bir gözlemci tarafından ölçülen göreceli yüzey kütleçekimi

$$g_s = \frac{GM}{R^2} \left(1 - \frac{2GM}{Rc^2}\right)^{-1/2}. \quad (133)$$

şeklindedir. Aynı yıldız için

$$g_s = 2.53 \times 10^{12} \text{ m s}^{-2}. \quad (134)$$

elde edilir.

11.2. Düzgün-yoğunluk modelinde merkez basıncı

$$M = 1.40 M_{\odot}, \quad R = 12.0 \text{ km.} \quad (135)$$

alalım. Bu durumda

$$\beta = \frac{1.4766(1.40)}{12.0} = 0.172. \quad (136)$$

olur. Bu modelde sabit yoğunluğa eşit olan ortalama yoğunluk

$$\rho_0 = 3.85 \times 10^{17} \text{ kg m}^{-3}. \quad (137)$$

değerindedir.

$$\sqrt{1 - 2\beta} = 0.810, \quad (138)$$

olduğundan, (87) denklemi

$$\frac{P_c}{\rho_0 c^2} = \frac{1 - 0.810}{3(0.810) - 1} = 0.133. \quad (139)$$

verir. Böylece

$$P_c = 0.133 \rho_0 c^2 = 4.61 \times 10^{33} \text{ Pa.} \quad (140)$$

Bu basınç yersel standartlara göre muazzamdır; fakat nötron yıldızı iç bölgeleri için tipiktir.

11.3. TOV düzeltme çarpanlarının büyüklüğü

$$\frac{P}{\rho c^2} = 0.10, \quad \frac{4\pi r^3 P}{mc^2} = 0.20, \quad \frac{2Gm}{rc^2} = 0.35, \quad (141)$$

olan bir yarıçapta düzeltme çarpanları

$$I = 1.10, \quad S = 1.20, \quad \mathcal{G} = 1.54. \quad (142)$$

olur. Çarpımları

$$I S \mathcal{G} = 2.03. \quad (143)$$

değerindedir. Bu nedenle gereken basınç gradyanı, aynı m , r ve ρ için Newtoncu değerin yaklaşık iki katıdır. Göreceli yıldızları desteklemek, Newtoncu sezginin önerdiğinden daha zordur.

11.4. Düzgün-yoğunluklu bir yıldızın bağlanma enerjisi

Düzgün-yoğunluk çözümü bağlanma enerjisi için saydam bir kestirim de verir. Durgun-kütle yoğunluğu sabit yoğunluk ρ_0 ile özdeşleştirilirse, baryonik kütle

$$M_b = 4\pi\rho_0 \int_0^R \frac{r^2 dr}{\sqrt{1 - 2\beta r^2/R^2}}. \quad (144)$$

olur. $y = r/R$ ile bu

$$\frac{M_b}{M} = 3 \int_0^1 \frac{y^2 dy}{\sqrt{1 - 2\beta y^2}}. \quad (145)$$

biçimine gelir. İntegralin kapalı biçimi

$$\frac{M_b}{M} = \frac{3}{2(2\beta)^{3/2}} \left[\sin^{-1} \sqrt{2\beta} - \sqrt{2\beta(1 - 2\beta)} \right]. \quad (146)$$

şeklindedir. $1.40 M_{\odot}$, 12.0 km örneği için $\beta = 0.172$ ve (146)

$$\frac{M_b}{M} = 1.135. \quad (147)$$

sonucunu verir. Dolayısıyla

$$M_b - M = 0.189 M_{\odot}. \quad (148)$$

Karşılık gelen bağlanma enerjisi

$$E_b = 0.189 M_{\odot} c^2 = 3.38 \times 10^{46} \text{ J.} \quad (149)$$

olur. Bu,

$$\frac{E_b}{Mc^2} = 0.135 \quad (150)$$

oranında kütleçekimsel kütle enerjisine karşılık gelir. Gerçekçi yıldızlar merkezde yoğunlaştığından ve ρ içine iç enerji katkıları içerdiğinden kestirim modele bağlıdır; ancak nötron yıldızı bağlanma enerjilerinin astrofiziksel olarak muazzam olduğunu doğru biçimde gösterir.

12. Genişletmeler ve Gözlemsel Testler

TOV denklemi, görelî yıldız modellerinin daha geniş hiyerarşisi için dönmeyen temel durumdur. Güncel kompakt-cisim astrofizikinde birkaç genişletme önemlidir.

İlk olarak, dönme hem denge biçimini hem de dış çokkutup momentlerini değiştirir. Yavaş dönme limitinde yıldız açısal momentumu

$$J = I\Omega, \quad (151)$$

şeklinde yazılır; burada I eylemsizlik momenti ve Ω sonsuzda ölçülen açısal hızdır. Çerçeve sürüklenmesi, yerel eylemsiz çerçevelerin $\omega(r)$ açısal hızını tanıtır. Ω 'da birinci mertebeye kadar, akışkanın yerel eylemsiz çerçevelere göre açısal hızı

$$\bar{\omega}(r) = \Omega - \omega(r). \quad (152)$$

şeklinde. Eylemsizlik momenti yaklaşık olarak kütle ve yarıçap tarafından kısıtlanır ve bir çift pulsarda I ölçümü hal denklemini güçlü biçimde sınırlandırır.

İkinci olarak, manyetik alanlar ve elastik gerilmeler basıncı anizotropik hâle getirebilir. Basit bir anizotropik gerilme tensörü radyal ve teğetsel basınçlara, P_r ve P_t , sahiptir. Hidrostatik denklem şematik olarak

$$\frac{dP_r}{dr} = -\frac{Gm\rho}{r^2} \left(1 + \frac{P_r}{\rho c^2}\right) \left(1 + \frac{4\pi r^3 P_r}{mc^2}\right) \left(1 - \frac{2Gm}{rc^2}\right)^{-1} + \frac{2(P_t - P_r)}{r} \quad (153)$$

biçimine genelleşir. Son terim mükemmel-akışkan dengesine bir görelî düzeltme değildir; anizotropik gerilmenin neden olduğu bir kuvvettir. Pozitif $P_t - P_r$ ek dışa doğru destek sağlarken, negatif $P_t - P_r$ ters etki yapar.

Üçüncü olarak, çift sistem içe sarmalları bir yıldızın dış gelgit alanına verdiği yanıtı yoklar. Başlıca boyutsuz gelgit şekil değiştirilebilirliği

$$\Lambda_{\text{tidal}} = \frac{2}{3} k_2 \left(\frac{Rc^2}{GM} \right)^5, \quad (154)$$

şeklinde; burada k_2 kuadropol Love sayısıdır. R/M üzerindeki güçlü beşinci kuvvet bağımlılığı, kütleçekim dalgalarının yarıçaplara özellikle duyarlı olduğu anlamına gelir. GW170817 çift nötron yıldızı olayı gelgit şekil değiştirilebilirliklerini kısıtlamış ve bu nedenle kanonik-kütleli nötron yıldızları için aşırı büyük yarıçapları elverişsiz kılmıştır [16]. Uygulamada aday bir hal denklemi, TOV denklemleri çözülerek, $M(R)$ ve gelgit yanıtı hesaplanarak ve öngörülen gözlenebilirler pulsar zamanlaması, X-ışını atım profilleri ve kütleçekim dalgası verileriyle karşılaştırılarak test edilir.

Son olarak, tanımlanabilir tayfsal özellikler mevcut olduğunda yüzey kırmızıya kayması doğrudan bir kompaktlık gözlenebiliridir. Ölçülmüş bir kırmızıya kayma

$$\frac{GM}{Rc^2} = \frac{1}{2} \left[1 - \frac{1}{(1+z_s)^2} \right]. \quad (155)$$

belirler. M ve R değerlerini ayrı ayrı belirlemez; ancak bağımsız bir kütle veya yarıçap ölçümüyle birleştirildiğinde görelî yıldız yapısının sıkı bir testi hâline gelir.

13. Tartışma

Türetim statik, küresel, izotropik bir mükemmel akışkan varsaymıştır. Bu varsayımlar kısıtlayıcı fakat güçlüdür. Dönmeyi, manyetik alanları, elastik kabuk kaymasını, süperakışkan çok-akışkan dinamiğini, sıcaklık gradyanlarını ve zamana bağımlılığı dışlarlar. Yavaş dönen nötron yıldızları Hartle-Thorne biçimciliğiyle pertürbatif olarak ele alınabilirken, hızlı dönen yıldızlar iki boyutlu sayısal görelilik gerektirir. Güçlü manyetik alanlar anizotropik gerilmeler oluşturabilir ve ısı etkileri proto-nötron yıldızlarında ve birleşme kalıntılarındadır. Bununla birlikte TOV denklemi, bu iyileştirmelerin ölçüldüğü temel çizgi olmayı sürdürür.

Newtoncu ve görelî denge arasındaki en önemli kavramsal fark basıncın rolüdür. Newtoncu kuramda basınç yalnızca gradyanı aracılığıyla görünür. Uzaysal olarak düzgün basıncın kütleçekimsel etkisi yoktur. Genel görelilikte basınç T^{μ}_{ν} tensörüne ve dolayısıyla eğrilik katkısında bulunur. Bu katkı TOV denkleminde iki kez görünür: basınç $\rho + P/c^2$ aracılığıyla eylemsiz yoğunluğu artırır ve $m + 4\pi r^3 P/c^2$ aracılığıyla etkin kütleçekimsel kütleleri artırır. Üçüncü bir düzeltme, $(1 - 2Gm/(rc^2))^{-1}$ ile temsil edilen uzaysal eğrilikten doğar. Bu etkilerin tümü denge için gereken basınç gradyanını artırır.

Büchdahl sınırı sonucu açıkça gösterir. Düzgün yoğunluk gibi yapay olarak elverişli bir durumda bile merkez basıncı $R = 9GM/(4c^2)$ konumunda ıraksar. Gerçekçi hal denklemleri tam olarak düzgün yoğunluğa sahip değildir ve nedensellik ek kısıtlar getirir. Maksimum kütle varlığı fiziksel olarak şundan kaynaklanır: merkez yoğunluğu artırıldığında, konfigürasyon yeterince kompakt hâle geldiğinde kütleçekim basınç desteğinin telafi edebileceğinden daha hızlı güçlenir. Maksimum kütle evrensel bir sabit değildir; yüksek yoğunluk nükleer hal denkleminin bağımlıdır. $2M_{\odot}$ yakınındaki gözlenen pulsarlar, soğuk yoğun maddenin nükleer doyum yoğunluğunun üzerinde yeterince sert olması gerektiğini ima eder; ancak nedensellik ve gelgit-şekil değiştirilebilirliği kısıtları ne kadar sert olabileceğini sınırlar [12, 15].

Kütle-yarıçap gözlemleri, atım-profil modellemesi, çift nötron yıldızı birleşmelerinden gelen kütleçekim dalgaları ve nükleer deneyler artık nükleer-üstü yoğunlukta $P(\rho)$ bağıntısını birlikte kısıtlamaktadır. TOV denklemi mikrofizik ile gözlenebilirler arasındaki köprüdür: önerilen bir hal denklemi için $M(R)$, kompaktlık, kırmızıya kayma, gelgit şekil değiştirilebilirliği ve kararlılığı öngörür. Tersine, gözlemler yersel laboratuvarlarda erişilemeyen yoğunluklarda izin verilen basıncı sınırlar.

14. Sonuç

Statik küresel metriktir, mükemmel-akışkan gerilme-enerji tensöründen, Einstein denklemlerinden ve yerel gerilme-enerji korunumundan başlayarak TOV denkle-

mini standart çarpanlara ayrılmış biçiminde türettik:

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{Gm\rho}{r^2} \left(1 + \frac{P}{\rho c^2}\right) \left(1 + \frac{4\pi r^3 P}{mc^2}\right) \left(1 - \frac{2Gm}{rc^2}\right)^{-1}. \quad (156)$$

Türetim, görelî hidrostatik dengenin küçük düzeltmeler eklenmiş Newtoncu denge değil, basınç gradyanlarını uzayzaman eğriliğine bağlayan geometrik bir koşul olduğunu gösterir. İlk düzeltme çarpanı basınç eylemsizliğini, ikincisi kütleçekim kaynağı olarak basıncı, üçüncüsü ise uzaysal eğriliği temsil eder. Zayıf-alan, düşük-basınç limitinde denklem Newtoncu hidrostatik dengeye indirgenir.

Düzgün-yoğunluklu Schwarzschild iç çözümü, görelî basıncın kompaktlıkla nasıl arttığını ve Buchdahl sınırına nasıl yol açtığını açıkça gösterir:

$$R > \frac{9GM}{4c^2}. \quad (157)$$

Nötron yıldızları için TOV denklemi, nedensel bir yüksek-yoğunluk hal denklemiyle birleştirildiğinde maksimum kütleyle sahip kütle-yarıçap dizilerini öngörür. Kütleleri $2M_\odot$ yakınında olan gözlenen pulsarlar hal denkleminin yeterince sert olmasını gerektirirken, nedensellik ve kompaktlık olası yarıçaplar ile maksimum kütle aralığını sınırlar. Böylece TOV denklemi genel göreliliği, nükleer fiziği ve astronomik gözlemi birbirine bağlayan temel araçlardan biri olmayı sürdürür.

A. Düzgün-Yoğunluk Çözümü İçin Cebirsel Ayrıntılar

Bu ekte (86) sonucuna götüren ara integrasyon adımları verilmektedir.

$$x = \frac{r}{R}, \quad A(x) = \sqrt{1 - 2\beta x^2}, \quad A_s = \sqrt{1 - 2\beta}. \quad (158)$$

olsun. Düzgün yoğunluk için (85)

$$\frac{dq}{(1+q)(1/3+q)} = -\frac{3\beta x dx}{1 - 2\beta x^2}. \quad (159)$$

biçiminde yazılabilir. Sol taraf

$$\frac{1}{(1+q)(1/3+q)} = -\frac{3}{2} \frac{1}{1+q} + \frac{3}{2} \frac{1}{1/3+q}. \quad (160)$$

olarak ayrışır. Bu nedenle

$$\int \frac{dq}{(1+q)(1/3+q)} = \frac{3}{2} \ln \left(\frac{q+1/3}{q+1} \right). \quad (161)$$

Sağ tarafın integrali

$$-3\beta \int \frac{x dx}{1 - 2\beta x^2} = \frac{3}{4} \ln(1 - 2\beta x^2) + C. \quad (162)$$

olur. Bu sonuçların birleştirilmesi

$$\ln \left(\frac{q+1/3}{q+1} \right) = \frac{1}{2} \ln(1 - 2\beta x^2) + C_1. \quad (163)$$

verir. Üs alınır,sa,

$$\frac{q+1/3}{q+1} = C_2 A(x). \quad (164)$$

Yüzey koşulu $q(1) = 0$,

$$C_2 = \frac{1}{3A_s}. \quad (165)$$

değerini sabitler. Böylece

$$3A_s(q+1/3) = A(x)(q+1). \quad (166)$$

Bu doğrusal denklemin q için çözülmesi

$$q(x) = \frac{A(x) - A_s}{3A_s - A(x)}, \quad (167)$$

sonucunu verir; bu da (86) ifadesidir.

B. Merkez Seri Açılımı

Sayısal integrasyonları başlatmak için kullanılan seri açılımı doğrudan TOV denkleminden gelir.

$$\rho(r) = \rho_c + \rho_2 r^2 + O(r^4), \quad P(r) = P_c + P_2 r^2 + O(r^4). \quad (168)$$

olduğunu varsayalım. Bu durumda kütle denklemi

$$m(r) = \frac{4\pi}{3} \rho_c r^3 + O(r^5). \quad (169)$$

verir. Çarpanlara ayrılmamış TOV denkleminde koyma, önde gelen mertebede

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{4\pi G}{3} (\rho_c + P_c/c^2)(\rho_c + 3P_c/c^2)r + O(r^3). \quad (170)$$

sonucunu verir. $dP/dr = 2P_2 r + O(r^3)$ olduğundan,

$$P_2 = -\frac{2\pi G}{3} (\rho_c + P_c/c^2)(\rho_c + 3P_c/c^2). \quad (171)$$

bulunur. Bu, (119) ifadesini yeniden üretir ve pozitif yoğunluk ve basınç için $P'(0) = 0$ iken $P''(0) < 0$ olduğunu açıkça gösterir.

Kaynaklar

- [1] B. W. Carroll and D. A. Ostlie, *An Introduction to Modern Astrophysics*, 2. baskı, Cambridge University Press, Cambridge (2017).
- [2] K. Schwarzschild, "On the gravitational field of a mass point according to Einstein's theory," *Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften* 1916, 189–196 (1916).
- [3] R. C. Tolman, "Static solutions of Einstein's field equations for spheres of fluid," *Physical Review* **55**, 364–373 (1939).
- [4] J. R. Oppenheimer and G. M. Volkoff, "On massive neutron cores," *Physical Review* **55**, 374–381 (1939).

- [5] H. A. Buchdahl, "General relativistic fluid spheres," *Physical Review* **116**, 1027–1034 (1959).
- [6] C. W. Misner, K. S. Thorne, and J. A. Wheeler, *Gravitation*, W. H. Freeman, San Francisco (1973).
- [7] S. Weinberg, *Gravitation and Cosmology*, John Wiley & Sons, New York (1972).
- [8] S. L. Shapiro and S. A. Teukolsky, *Black Holes, White Dwarfs, and Neutron Stars*, John Wiley & Sons, New York (1983).
- [9] S. Chandrasekhar, *An Introduction to the Study of Stellar Structure*, University of Chicago Press, Chicago (1939).
- [10] R. Kippenhahn, A. Weigert, and A. Weiss, *Stellar Structure and Evolution*, 2. baskı, Springer, Berlin (2012).
- [11] N. K. Glendenning, *Compact Stars: Nuclear Physics, Particle Physics, and General Relativity*, 2. baskı, Springer, New York (2000).
- [12] J. M. Lattimer and M. Prakash, "Neutron star observations: prognosis for equation of state constraints," *Physics Reports* **442**, 109–165 (2007).
- [13] J. Antoniadis et al., "A massive pulsar in a compact relativistic binary," *Science* **340**, 1233232 (2013).
- [14] H. T. Cromartie et al., "Relativistic Shapiro delay measurements of an extremely massive millisecond pulsar," *Nature Astronomy* **4**, 72–76 (2020).
- [15] E. Fonseca et al., "Refined mass and geometric measurements of the high-mass PSR J0740+6620," *The Astrophysical Journal Letters* **915**, L12 (2021).
- [16] B. P. Abbott et al., "GW170817: Observation of gravitational waves from a binary neutron star inspiral," *Physical Review Letters* **119**, 161101 (2017).