



GÖRELİLİK VE KARA DELİKLER

# Schwarzschild Metriğinin Türetimi ve Olay Ufku Çevresinde Jeodezik Hareketlerin Analizi

Akademik Araştırma Makalesi

Teorik Astrofizik — Adım Adım Analitik Türetimler, Vektör Diyagramları ve Sayısal Tablolar

# Schwarzschild Metriğinin Türetimi ve Olay Ufku Çevresinde Jeodezik Hareketlerin Analizi

Görelilik ve Kara Delikler

Eylül 2026

**Özet.** Schwarzschild çözümü, genel göreliliğin tekil asimptotik olarak düz, küresel simetrik vakum geometrisidir ve modern kara delikler kuramının, görelî yıldız yapısının, kompakt-cisim dinamiğinin ve kuvvetli-alan merceklenmesinin matematiksel temelini oluşturur. Bu makalede, Schwarzschild metriği iki bilinmeyen radyal fonksiyon içeren statik küresel simetrik çizgi elemanından türetilmekte, sıfırdan farklı Christoffel sembolleri ve Ricci tensörü bileşenleri açıkça hesaplanmakta ve vakum Einstein denklemleri adım adım çözülmektedir. İntegrasyon sabiti Newtoncu zayıf-alan limitiyle belirlenerek Schwarzschild yarıçapı  $r_s = 2GM/c^2$  elde edilmektedir. Daha sonra jeodezik hareket, jeodezik Lagrangiyeninden korunan enerji ve açısal momentum türetilerek, kütleli parçacıklar ve fotonlar için etkin potansiyeller kurularak ve dairesel yörüngeler, en iç kararlı dairesel yörünge, marjinal bağlı yörünge, foton küresi ve kara delik gölge ölçeği belirlenerek analiz edilmektedir. Olay ufkundaki koordinat tekiliği, öz zaman ve koordinat zamanı cinsinden radyal düşüş aracılığıyla yorumlanmakta ve içeri giren Eddington-Finkelstein koordinatları kullanılarak giderilmektedir. Kütleçekimsel kırmızıya kayma, günberi devinimi, ışık sapması, Shapiro gecikmesi, kompakt-yıldız kırmızıya kayma kestirimleri ve Olay Ufku Teleskobu açısal ölçekleri dâhil gözlemlenebilir testler nicel olarak tartışılmaktadır.

**Anahtar Kelimeler:** Schwarzschild metriği; kara delikler; jeodezikler; olay ufku; foton küresi; kütleçekimsel kırmızıya kayma; görelî yörüngeler

## 1. Giriş

Schwarzschild metriği görelî astrofizikte merkezi bir konuma sahiptir. Einstein alan denklemlerinin ilk tam çözümüdür ve genel göreliliğin nihai formülasyonundan birkaç ay sonra 1916 yılında bulunmuştur [1, 2]. Basit görünümüne karşın, kuvvetli kütleçekimin ayırt edici olgularının birçoğunu içerir: kütleçekimsel zaman genişmesi, olay ufukları, görelî yörüngesel devinim, kararsız foton yörüngeleri ve kara deliklerin optik görünümü. Ayrıca, Birkhoff teoremiyle biçimselleştirildiği üzere, cismin iç bileşiminden veya dinamik radyal titreşiminden bağımsız olarak, yalıtılmış, dönmeyen, küresel simetrik herhangi bir cismin dış uzay-zamanıdır [3, 5, 8].

Newtoncu kütleçekimde, küresel bir cismin dış kütleçekim alanı tamamen kütlesi tarafından belirlenir. Genel görelilik bu sonucu daha derin bir geometrik biçimde korur: madde dağılımının dışında, küresel simetri ve vakum Einstein denklemleri uzay-zaman metriğini tek bir kütle parametresine kadar tekil olarak belirler. Newtoncu potansiyel  $\Phi = -GM/r$  ancak zayıf-alan, yavaş-hareket limitinde geri elde edilir. Tam görelî sonuç, Newtoncu skaler potansiyeli çizgi elemanı

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{r_s}{r}\right) c^2 dt^2 + \left(1 - \frac{r_s}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2, \quad (1)$$

olan eğri bir Lorentz geometrisiyle değiştirir; burada

$$r_s = \frac{2GM}{c^2}, \quad d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2. \quad (2)$$

Koordinat yarıçapı  $r = r_s$  Schwarzschild olay ufkudur. Güneş kütleli bir cisim için  $r_s \approx 2.95$  km; kütlesi  $M \approx 6.5 \times 10^9 M_\odot$  olan M87'deki kara delik için karşılık gelen uzunluk ölçeği astronomiktir.

Bu makalenin amacı, ileri lisans ve lisansüstü düzey için uygun, eksiksiz bir türetim ve fiziksel analiz sunmaktır. Eğrilik koordinatlarında en genel statik küresel simetrik ansatzdan başlayacak, bağlantıyı ve eğriliği açıkça hesaplayacak, vakum alan denklemlerini çözecek ve ardından elde edilen geometriyi jeodezik hareketi incelemek için kullanacağız. Birimlerin korunmasına, koordinat etkilerinin değişmez fizikten ayrılmasına ve matematiksel sonuçların gözlemlerle ilişkilendirilmesine özel vurgu yapılmaktadır.

Schwarzschild çözümü yalnızca tarihsel bir dönüm noktası değildir. Kompakt-cisim çevreleri, yığılma akışları, görelî jetler, büyük kütleli kara deliklerin yakınındaki yıldız dinamiği, kütleçekimsel merceklenme ve görelî kütleçekim testleri için yerel modeli sağlar [7, 6, 9, 10]. Astrofiziksel kara delikler dönüyor olmalarına ve bu nedenle Kerr metriğiyle daha doğru betimlenmelerine rağmen, Schwarzschild geometrisi temel ilk yaklaşıklık ve olay ufuklarını ve foton yakalanmasını anlamının kavramsal temeli olmaya devam eder.

## 2. Fiziksel ve Matematiksel Çerçeve

### 2.1. Vakumda Einstein denklemleri

Genel görelilik, geometriyi maddeye Einstein alan denklemleri aracılığıyla bağlar:

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}. \quad (3)$$

Yalıtılmış küresel bir cismin dışında gerilme-enerji tensörü sıfırdır:

$$T_{\mu\nu} = 0. \quad (4)$$

(3) denkleminin dört boyutta izini almak

$$G^\mu{}_\mu = R - 2R = -R = \frac{8\pi G}{c^4} T^\mu{}_\mu. \quad (5)$$

sonucunu verir. Böylece vakumda

$$R = 0, \quad (6)$$

ve alan denklemleri

$$R_{\mu\nu} = 0. \quad (7)$$

biçimine indirgenir. Dolayısıyla görev, Ricci tensörü sıfır olan tüm statik küresel simetrik metrikleri bulmaktır.

**Tanım 1.** Bir uzay-zaman, hiperyüzey ortogonal zamansız Killing vektör alanına sahipse *statiktir*. Dönme grubu  $SO(3)$ , iki boyutlu uzaysı yörüngelerle izometrikler yoluyla etki ediyorsa *küresel simetrik*dir.

Statiklik, dönmeyi ve zamana bağlı kütleçekimsel ışıınımı dışlar. Küresel simetri, metriğin açısıl kısmının birim iki-küre üzerindeki metrikle orantılı olduğunu ima eder. Radyal koordinat  $r$  öyle seçilir ki sabit  $t$  ve  $r$  kürelerinin alanı  $4\pi r^2$  olsun. Bu, alan yarıçapıdır; zorunlu olarak öz radyal uzaklık değildir.

## 2.2. Statik küresel simetrik ansatz

Alan koordinatlarında en genel statik küresel simetrik metrik

$$ds^2 = -A(r)c^2 dt^2 + B(r)dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2. \quad (8)$$

biçiminde yazılabilir.  $A(r)$  ve  $B(r)$  fonksiyonlarının dış statik bölgede pozitif olduğu varsayılır. Asimptotik düzlük

$$\lim_{r \rightarrow \infty} A(r) = 1, \quad \lim_{r \rightarrow \infty} B(r) = 1. \quad (9)$$

koşulunu gerektirir. Metrik bileşenleri

$$g_{\mu\nu} = \text{diag}(-Ac^2, B, r^2, r^2 \sin^2 \theta), \quad (10)$$

ve ters metrik

$$g^{\mu\nu} = \text{diag}\left(-\frac{1}{Ac^2}, \frac{1}{B}, \frac{1}{r^2}, \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta}\right). \quad (11)$$

şeklindedir. Üs işaretleri  $r'$ 'ye göre türevi gösterecektir. Christoffel sembolleri

$$\Gamma^\alpha{}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} (\partial_\mu g_{\beta\nu} + \partial_\nu g_{\beta\mu} - \partial_\beta g_{\mu\nu}). \quad (12)$$

ile belirlenir. Metrik köşegen olduğundan ve  $t$  ile  $\phi'$ 'den bağımsız olduğundan, bağlantı katsayılarının çoğu sıfırdır.

## 3. Ansatzın Bağlantısı ve Eğriliği

### 3.1. Christoffel sembolleri

Zamansal bileşenler için tek radyal türev

$$\partial_r g_{tt} = -c^2 A'(r). \quad (13)$$

olur. Dolayısıyla

$$\Gamma^t{}_{tr} = \Gamma^t{}_{rt} = \frac{1}{2} g^{tt} \partial_r g_{tt} = \frac{A'}{2A}, \quad (14)$$

$$\Gamma^r{}_{tt} = -\frac{1}{2} g^{rr} \partial_r g_{tt} = \frac{c^2 A'}{2B}. \quad (15)$$

Saf radyal katsayı

$$\Gamma^r{}_{rr} = \frac{1}{2} g^{rr} \partial_r g_{rr} = \frac{B'}{2B}. \quad (16)$$

şeklindedir. Açısıl-radyal bağlaşımlar  $\partial_r g_{\theta\theta} = 2r$  ve  $\partial_r g_{\phi\phi} = 2r \sin^2 \theta$  ifadelerinden gelir:

$$\Gamma^r{}_{\theta\theta} = -\frac{r}{B}, \quad (17)$$

$$\Gamma^r{}_{\phi\phi} = -\frac{r \sin^2 \theta}{B}, \quad (18)$$

$$\Gamma^\theta{}_{r\theta} = \Gamma^\theta{}_{\theta r} = \frac{1}{r}, \quad (19)$$

$$\Gamma^\phi{}_{r\phi} = \Gamma^\phi{}_{\phi r} = \frac{1}{r}. \quad (20)$$

Son olarak, birim küre üzerindeki içsel bağlantı

$$\Gamma^\theta{}_{\phi\phi} = -\sin \theta \cos \theta, \quad (21)$$

$$\Gamma^\phi{}_{\theta\phi} = \Gamma^\phi{}_{\phi\theta} = \cot \theta. \quad (22)$$

sonuçlarını verir. (14)–(22) denklemleri sıfırdan farklı bağımsız Christoffel sembolleridir.

*Not 1.*  $c$  çarpanları yalnızca  $t$  içeren bileşenlerde ortaya çıkar.  $c$  sabit olduğundan çoğu eğrilik denkleminde sadeleşerek çıkarlar; başlıca rolleri boyutsaldır ve  $t$ 'nin uzunluk yerine zaman birimine sahip olmasını sağlar.

### 3.2. Ricci tensörü bileşenleri

Ricci tensörü

$$R_{\mu\nu} = \partial_\alpha \Gamma^\alpha{}_{\mu\nu} - \partial_\nu \Gamma^\alpha{}_{\mu\alpha} + \Gamma^\alpha{}_{\mu\nu} \Gamma^\beta{}_{\alpha\beta} - \Gamma^\beta{}_{\mu\alpha} \Gamma^\alpha{}_{\nu\beta}. \quad (23)$$

şeklindedir. Vakum denklemleri için gereken bağımsız bileşenleri hesaplayalım.

$R_{tt}$  için zaman türevleri yok olur. İlk terim

$$\partial_r \Gamma^r{}_{tt} = \frac{c^2}{2} \left( \frac{A''}{B} - \frac{A'B'}{B^2} \right). \quad (24)$$

olur. Üçüncü terime giren iz

$$\Gamma^\beta{}_{r\beta} = \frac{A'}{2A} + \frac{B'}{2B} + \frac{2}{r}. \quad (25)$$

şeklindedir. Bu nedenle

$$\Gamma^r{}_{tt} \Gamma^\beta{}_{r\beta} = \frac{c^2 A'}{2B} \left( \frac{A'}{2A} + \frac{B'}{2B} + \frac{2}{r} \right). \quad (26)$$

Dördüncü terim,  $\Gamma^t_{tr}$  ve  $\Gamma^r_{tt}$  içeren iki eşit katkıyı içerir:

$$-\Gamma^\beta_{t\alpha}\Gamma^\alpha_{t\beta} = -\frac{c^2 A'^2}{2AB}. \quad (27)$$

Bunları birleştirmek

$$R_{tt} = \frac{c^2}{2B} \left[ A'' - \frac{A'B'}{2B} - \frac{A'^2}{2A} + \frac{2A'}{r} \right]. \quad (28)$$

sonucunu verir.

$R_{rr}$  için

$$R_{rr} = -\frac{A''}{2A} + \frac{A'^2}{4A^2} + \frac{A'B'}{4AB} + \frac{B'}{Br}. \quad (29)$$

elde edilir. Açısal bileşen  $R_{\theta\theta}$  ise

$$R_{\theta\theta} = 1 - \frac{1}{B} + \frac{rB'}{2B^2} - \frac{rA'}{2AB}. \quad (30)$$

şeklinde. Kalan açısal bileşen küresel simetriyle ilişkilidir:

$$R_{\phi\phi} = \sin^2 \theta R_{\theta\theta}. \quad (31)$$

(28), (29) ve (30) denklemleri ansatzın temel eğrilik içeriğini oluşturur.

## 4. Vakum Alan Denklemlerinin Çözülmesi

### 4.1. $A(r)B(r) = 1$ sonucunun türetimi

Vakum koşulları

$$R_{tt} = 0, \quad R_{rr} = 0, \quad R_{\theta\theta} = 0. \quad (32)$$

şeklinde. Özellikle verimli bir bileşim

$$\frac{R_{tt}}{Ac^2} + \frac{R_{rr}}{B} = 0. \quad (33)$$

olarak verilir. (28) ve (29) ifadelerinin yerine yazılması, ikinci türev ve karesel terimlerin sadeleşmesini sağlar:

$$0 = \frac{1}{Br} \left( \frac{A'}{A} + \frac{B'}{B} \right) \quad (34)$$

$$= \frac{1}{Br} \frac{d}{dr} \ln(AB). \quad (35)$$

Dış bölgede  $B$  ve  $r$  sıfır olmadığından,

$$\frac{d}{dr} \ln(AB) = 0. \quad (36)$$

Buna göre

$$A(r)B(r) = C_1, \quad (37)$$

burada  $C_1$  sabittir. Asimptotik düzlük (9),  $C_1 = 1$  gerektirir; dolayısıyla

$$A(r)B(r) = 1, \quad B(r) = \frac{1}{A(r)}. \quad (38)$$

Bu sonucun basit bir yorumu vardır: Schwarzschild koordinatlarında, kütleçekimsel kırmızıya kayma çarpanı ile radyal gerilme çarpanı vakumda birbirinin tersidir.

### 4.2. $A(r) = 1 - r_s/r$ sonucunun türetimi

(30) içinde  $B = 1/A$  kullanarak

$$B' = -\frac{A'}{A^2}. \quad (39)$$

hesaplarız. O hâlde

$$0 = R_{\theta\theta} = 1 - A + \frac{r}{2} \left( -\frac{A'}{A^2} \right) A^2 - \frac{rA'}{2} \quad (40)$$

$$= 1 - A - rA'. \quad (41)$$

Böylece

$$rA' + A = 1. \quad (42)$$

Bu,

$$\frac{d}{dr} (rA) = 1. \quad (43)$$

ifadesine denktir. İntegrasyonla

$$rA = r + C_2, \quad (44)$$

veya

$$A(r) = 1 + \frac{C_2}{r}. \quad (45)$$

elde edilir.  $C_2$  sabiti Newtoncu limite eşleştirme ile belirlenir.

Zayıf-alan, yavaş-hareket limitinde metriğin zaman-zaman bileşeni Newtoncu potansiyelle

$$g_{tt} \simeq -\left(1 + \frac{2\Phi}{c^2}\right) c^2. \quad (46)$$

ilişkilidir.  $g_{tt} = -Ac^2$  olduğundan,

$$A(r) \simeq 1 + \frac{2\Phi}{c^2}. \quad (47)$$

koşulunu isteriz. Merkezi bir kütle  $M$  için

$$\Phi(r) = -\frac{GM}{r}. \quad (48)$$

Dolayısıyla

$$A(r) \simeq 1 - \frac{2GM}{c^2 r}. \quad (49)$$

(45) ile karşılaştırma

$$C_2 = -\frac{2GM}{c^2}. \quad (50)$$

sonucunu verir. Schwarzschild yarıçapını

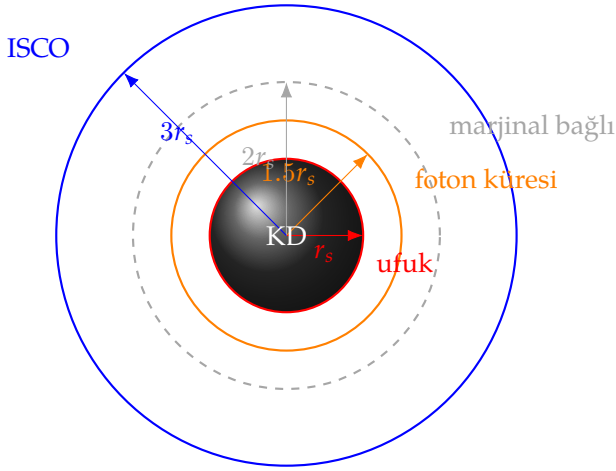
$$r_s = \frac{2GM}{c^2}, \quad (51)$$

olarak tanımlayarak

$$A(r) = 1 - \frac{r_s}{r}, \quad B(r) = \left(1 - \frac{r_s}{r}\right)^{-1}. \quad (52)$$

elde ederiz. (8) içinde yerine yazma Schwarzschild çizgi elemanını verir:

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{r_s}{r}\right) c^2 dt^2 + \left(1 - \frac{r_s}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2. \quad (53)$$



**Şekil 1.**  $r_s = 2GM/c^2$  birimleri cinsinden Schwarzschild geometrisinin karakteristik yarıçapları. Olay ufku  $r = r_s$  konumunda, foton küresi  $r = 1.5r_s$  konumunda, marjinal bağlı zamansı dairesel yörünge  $r = 2r_s$  konumunda ve en iç kararlı dairesel yörünge  $r = 3r_s$  konumundadır.

**Teorem 1** (Birkhoff teoremi). *Vakum Einstein denklemlerinin her küresel simetrik çözümü, yerel olarak Schwarzschild çözümünün bir parçasına izometriktir. Sonuç olarak, küresel simetrik bir cismin dış kütleçekim alanı, cisim radyal titreşimler yapsa bile statiktir.*

**Not 2.** Birkhoff teoreminin uzay-zaman geometrisini içeren Newtoncu bir benzeri yoktur; ancak kabuk teoremini genelleştirir. Ayrıca kusursuz küresel bir yıldız çöküşünün kütleçekim dalgaları yaymadığını da ima eder: kütleçekimsel ışınım, zamana bağlı bir kuadrupol veya daha yüksek çok-kutup momenti gerektirir.

## 5. Kütleçekimsel Zaman Genleşmesi ve Kırmızıya Kayma

Sabit  $r, \theta, \phi$  konumundaki durağan bir gözlemci için çizgi elemanı

$$ds^2 = -c^2 d\tau^2 = -\left(1 - \frac{r_s}{r}\right) c^2 dt^2. \quad (54)$$

koşulunu sağlar. Bu nedenle yerel gözlemcinin ölçtüğü öz zaman aralığı

$$d\tau = \sqrt{1 - \frac{r_s}{r}} dt. \quad (55)$$

olur. Kütleçekim alanının daha derinindeki saatler, sonsuzda normalize edilen koordinat zamanına göre daha yavaş çalışır.

Biri  $r_e$  yarıçapında ışık yayan, diğeri  $r_o$  yarıçapında bunu gözleyen iki statik gözlemci düşünelim. Zamansı Killing vektörüyle ilişkili korunan foton enerjisi

$$h\nu(r) = \frac{E_\infty}{\sqrt{1 - r_s/r}}. \quad (56)$$

sonucunu ima eder. Dolayısıyla

$$\frac{\nu_o}{\nu_e} = \sqrt{\frac{1 - r_s/r_e}{1 - r_s/r_o}}. \quad (57)$$

Sonsuzda gözlem için,  $r_o \rightarrow \infty$ , bu ifade

$$\frac{\nu_\infty}{\nu_e} = \sqrt{1 - \frac{r_s}{r_e}}. \quad (58)$$

biçimine gelir. Kütleçekimsel kırmızıya kayma

$$1 + z = \frac{\nu_e}{\nu_\infty} = \left(1 - \frac{r_s}{r_e}\right)^{-1/2}. \quad (59)$$

şeklinde.  $r_e \rightarrow r_s^+$  iken  $z \rightarrow \infty$ . Bu ıraksama, öz ivmeleri de ufukta ıraksayan statik gözlemciler tarafından yayılan fotonlara ilişkindir. Serbest düşen bir gözlemcinin orada yerel bir tekillikle karşılaştığı anlamına gelmez.

Statik bir gözlemcinin dört-hızı  $u^\mu u_\mu = -c^2$  ile belirlenir ve yalnızca zaman bileşenine sahiptir:

$$u^t = \frac{1}{\sqrt{1 - r_s/r}}, \quad u^r = u^\theta = u^\phi = 0. \quad (60)$$

Gözlemci jeodezik harekette değildir. Dört-ivmesi

$$a^\mu = u^\nu \nabla_\nu u^\mu. \quad (61)$$

şeklinde. (15),  $A = 1 - r_s/r$  ve  $B = 1/A$  ile kullanıldığında, sıfırdan farklı tek bileşen

$$a^r = \Gamma^r_{tt} (u^t)^2 = \frac{c^2 r_s}{2r^2}. \quad (62)$$

olur. Gözlemcinin taşıdığı bir ivmeölçerin ölçtüğü değişmez büyüklük

$$a = \sqrt{g_{rr} a^r a^r} = \frac{GM}{r^2 \sqrt{1 - r_s/r}}. \quad (63)$$

şeklinde. Büyük yarıçapta bu Newtoncu değer  $GM/r^2$  olurken, ufukta ıraksar. Böylece, Schwarzschild ufkunun hemen üzerinde asılı kalmak sınırsız roket ivmesi gerektirir; oysa serbest düşen çerçeveler yerel olarak düzenli kalır.

## 6. Jeodezik Hareket

### 6.1. Lagrangiyen ve hareket sabitleri

Jeodezikler, zamansı eğriler için öz zamanı veya null eğriler için afin parametreyi ekstremal kılar. Küresel simetriyle izin verilen eşlek düzlemde  $\theta = \pi/2$ , Schwarzschild çizgi elemanı Lagrangiyeni

$$2\mathcal{L} = -\left(1 - \frac{r_s}{r}\right) c^2 \dot{t}^2 + \left(1 - \frac{r_s}{r}\right)^{-1} \dot{r}^2 + r^2 \dot{\phi}^2, \quad (64)$$

olarak verir; burada nokta, kütleli parçacıklar için öz zaman  $\tau$ 'ya, fotonlar için ise afin parametre  $\lambda$ 'ya göre türevi gösterir. Normalizasyon koşulu

$$2\mathcal{L} = -\kappa c^2, \quad \kappa = \begin{cases} 1, & \text{kütleli parçacık,} \\ 0, & \text{foton.} \end{cases} \quad (65)$$

şeklinde.  $t$  ve  $\phi$  çevrimsel koordinatlar olduğundan iki korunan nicelik vardır. Kütleli parçacıklar için birim durgun kütle başına korunan enerji

$$E = \left(1 - \frac{r_s}{r}\right) c^2 \dot{t}, \quad (66)$$

ve birim durgun kütle başına korunan açısal momentum

$$L = r^2 \dot{\phi}. \quad (67)$$

şeklinde. (65) içine yerine koyma

$$-\frac{E^2}{c^2(1 - r_s/r)} + \left(1 - \frac{r_s}{r}\right)^{-1} \dot{r}^2 + \frac{L^2}{r^2} = -c^2. \quad (68)$$

sonucunu verir.  $1 - r_s/r$  ile çarpmak radyal denklemi

$$\dot{r}^2 + V_{\text{eff}}(r) = \frac{E^2}{c^2}, \quad (69)$$

etkin potansiyel

$$V_{\text{eff}}(r) = \left(1 - \frac{r_s}{r}\right) \left(c^2 + \frac{L^2}{r^2}\right). \quad (70)$$

ile verir.  $c^2(1 - r_s/r)$  terimi göreceli kütleçekimsel katkıdır; açısal momentum terimi ise aynı kırmızıya kayma çarpanı tarafından değiştirilir. Bu değişiklik, Newtoncu kütleçekimde bulunmayan iç kararsız bölgeyi üretir.

Fotonlar için korunan nicelikleri

$$E_\gamma = \left(1 - \frac{r_s}{r}\right) c^2 \frac{dt}{d\lambda}, \quad (71)$$

$$L_\gamma = r^2 \frac{d\phi}{d\lambda}. \quad (72)$$

olarak tanımlayalım. Null koşul

$$\left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2 + V_{\text{ph}}(r) = \frac{E_\gamma^2}{c^2}, \quad (73)$$

denklemini verir; burada

$$V_{\text{ph}}(r) = \left(1 - \frac{r_s}{r}\right) \frac{L_\gamma^2}{r^2}. \quad (74)$$

## 6.2. Dairesel kütleli yörüngeler ve ISCO

Dairesel zamansı bir yörünge

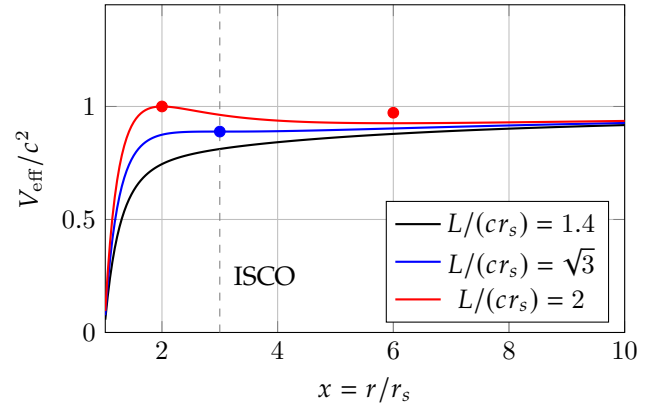
$$\dot{r} = 0, \quad \frac{dV_{\text{eff}}}{dr} = 0. \quad (75)$$

koşullarını sağlar. (70) ifadesinin türevi:

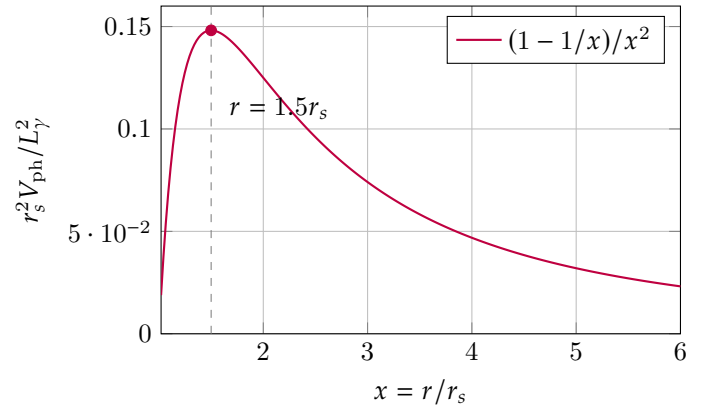
$$\frac{dV_{\text{eff}}}{dr} = \frac{r_s}{r^2} \left(c^2 + \frac{L^2}{r^2}\right) - \left(1 - \frac{r_s}{r}\right) \frac{2L^2}{r^3}. \quad (76)$$

Bunu sıfıra eşitleyip  $r^3$  ile çarpmak

$$r_s c^2 r + \frac{r_s L^2}{r} - 2L^2 + \frac{2r_s L^2}{r} = 0. \quad (77)$$



**Şekil 2.** Kütleli parçacık etkin potansiyeli (70) boyutsuz biçimde.  $L/(cr_s) = 2$  için  $r = 2r_s$  konumunda kararsız bir dairesel yörünge ve  $r = 6r_s$  konumunda kararlı bir dairesel yörünge vardır. Sınır durumu  $L/(cr_s) = \sqrt{3}$ , ISCO'da,  $r = 3r_s$  konumunda bir büküm noktasına sahiptir.



**Şekil 3.** Foton etkin potansiyeli (74). Maksimumu, kararsız dairesel null yörüngeye karşılık gelen foton küresi  $r = 3r_s/2$  konumunda gerçekleşir. Daha küçük çarpma parametresine sahip fotonlar yakalanır.

sonucunu verir. Böylece

$$L^2 = \frac{c^2 r_s r^2}{2r - 3r_s}. \quad (78)$$

Dairesel zamansı yörüngeler

$$r > \frac{3}{2} r_s. \quad (79)$$

koşulunu gerektirir. (69) kullanıldığında karşılık gelen enerji

$$\frac{E^2}{c^4} = \frac{(r - r_s)^2}{r(r - \frac{3}{2} r_s)}. \quad (80)$$

olur. Kararlılık ikinci türevle belirlenir. Doğrudan türev alma

$$\left. \frac{d^2 V_{\text{eff}}}{dr^2} \right|_{\text{circ}} = \frac{2c^2 r_s (r - 3r_s)}{r^3 (2r - 3r_s)}. \quad (81)$$

sonucunu verir. Dolayısıyla kararlı dairesel yörüngeler

$$r > 3r_s. \quad (82)$$

gerektirir. En iç kararlı dairesel yörünge

$$r_{\text{ISCO}} = 3r_s = \frac{6GM}{c^2}. \quad (83)$$

şeklindedir. Bu yarıçapta

$$\frac{E_{\text{ISCO}}}{c^2} = \sqrt{\frac{8}{9}}, \quad (84)$$

dolayısıyla dönmeyen bir kara delik etrafındaki ince disk için en büyük bağlanma verimi

$$\eta = 1 - \sqrt{\frac{8}{9}} \approx 0.0572. \quad (85)$$

olur. Bu sonuç yığılma kuramında temeldir [12, 13].

Marjinal bağlı yörünge  $E = c^2$  ile tanımlanır. Bu koşulu (80) denkleminde uygulamak

$$1 = \frac{(r - r_s)^2}{r(r - \frac{3}{2}r_s)}. \quad (86)$$

sonucunu verir. Açıp sadeleştirmek

$$r_{\text{mb}} = 2r_s = \frac{4GM}{c^2}. \quad (87)$$

ifadesini verir.  $3r_s/2 < r < 3r_s$  aralığındaki dairesel yörüngeler vardır fakat kararsızdır. Marjinal bağlı yörünge bu kararsız aralıkta yer alır.

Schwarzschild koordinat zamanına göre ölçülen açısal frekans  $\Omega = \dot{\phi}/\dot{t}$  ifadesinden elde edilir. (66), (67), (78) ve (80) yerine yazıldığında şaşırtıcı biçimde Newtoncu görünen sonuç

$$\Omega^2 = \left(\frac{d\phi}{dt}\right)^2 = \frac{GM}{r^3}. \quad (88)$$

elde edilir. Yorum Newtoncu değildir; çünkü  $t$  sonsuzdaki bir gözlemcinin zamanı,  $r$  ise alan yarıçapıdır.  $r$  yarıçapındaki yerel statik gözlemci azimutal hızı

$$v_{\text{loc}} = \frac{r\Omega}{\sqrt{1 - r_s/r}} = c\sqrt{\frac{r_s}{2(r - r_s)}}. \quad (89)$$

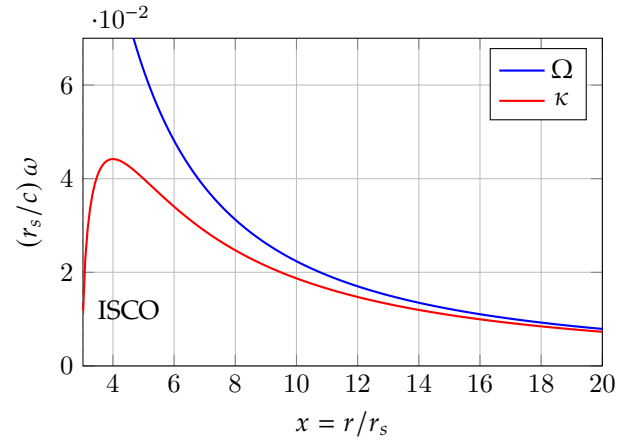
olarak ölçer. ISCO'da bu

$$v_{\text{loc}}(r_{\text{ISCO}}) = \frac{c}{2}. \quad (90)$$

sonucunu verir. Kararlı dairesel yörünge etrafındaki küçük radyal salınımlar koordinat episiklik frekansına sahiptir:

$$\kappa^2 = \Omega^2 \left(1 - \frac{3r_s}{r}\right). \quad (91)$$

Böylece  $\kappa$  ISCO'da sıfıra gider; bu da marjinal kararlılığın eşdeğer dinamik bir tanımını sağlar.



**Şekil 4.** Dairesel Schwarzschild yörüngeleri için boyutsuz birimlerde ifade edilen koordinat yörünge frekansı  $\Omega$  ve radyal episiklik frekans  $\kappa$ . Episiklik frekans  $r = 3r_s$  konumunda sıfıra yaklaşıp kararlı dairesel hareketin kaybına işaret eder.

### 6.3. Foton küresi ve gölge yarıçapı

Fotonlar için dairesel null yörüngeler

$$\frac{d}{dr} \left[ \left(1 - \frac{r_s}{r}\right) \frac{1}{r^2} \right] = 0. \quad (92)$$

koşulunu sağlar. Türev

$$-\frac{2}{r^3} + \frac{3r_s}{r^4} = 0. \quad (93)$$

olur. Dolayısıyla foton küresi

$$r_{\text{ph}} = \frac{3}{2}r_s = \frac{3GM}{c^2}. \quad (94)$$

konumundadır. Foton çarpma parametresi

$$b = \frac{cL_\gamma}{E_\gamma}. \quad (95)$$

şeklindedir. Radyal dönüş noktasında

$$\frac{E_\gamma^2}{c^2} = \left(1 - \frac{r_s}{r}\right) \frac{L_\gamma^2}{r^2}, \quad (96)$$

olduğundan

$$b^2 = \frac{r^2}{1 - r_s/r}. \quad (97)$$

elde edilir. Foton küresinde

$$b_{\text{crit}} = \frac{(3/2)r_s}{\sqrt{1/3}} = \frac{3\sqrt{3}}{2}r_s. \quad (98)$$

olur.  $r_s = 2GM/c^2$  kullanılırsa

$$b_{\text{crit}} = \sqrt{27} \frac{GM}{c^2}. \quad (99)$$

Bu, asimptotik olarak düz uzay-zamanda uzak bir gözlemci tarafından görülen Schwarzschild kara delik gölgesinin yarıçapıdır. M87\*'nin Olay Ufku Teleskobu görüntüsü,  $6.5 \times 10^9 M_\odot$  civarındaki bir kütle için (99) ile belirlenen kuvvetli mercekleme ölçeğiyle uyumlu, mertebesi  $40 \mu\text{as}$  olan bir açısal çapa sahip bir ışınım halkası ölçmüştür [15, 16].

## 7. Radyal Düşüş ve Olay Ufku

### 7.1. Sonsuzda durgun hâlden düşüş için öz zaman

Radyal düşüş için  $L = 0$  olur. Sonsuzda durgun hâlden bırakılan kütleli bir parçacık düşünelim. Korunan enerjisi

$$E = c^2. \quad (100)$$

şeklindedir. (69) denklemi

$$\dot{r}^2 = c^2 - c^2 \left(1 - \frac{r_s}{r}\right) = \frac{c^2 r_s}{r}. \quad (101)$$

olur. İçe doğru hareket için

$$\frac{dr}{d\tau} = -c \sqrt{\frac{r_s}{r}}. \quad (102)$$

$r_0$ 'dan  $r$ 'ye integre ederek

$$\tau(r) - \tau(r_0) = \frac{1}{c\sqrt{r_s}} \int_r^{r_0} \sqrt{r'} dr'. \quad (103)$$

elde edilir. Dolayısıyla

$$\tau(r) - \tau(r_0) = \frac{2}{3c\sqrt{r_s}} \left(r_0^{3/2} - r^{3/2}\right). \quad (104)$$

Ufka ulaşmak için geçen öz zaman sonludur:

$$\Delta\tau_{r_0 \rightarrow r_s} = \frac{2r_s}{3c} \left[ \left(\frac{r_0}{r_s}\right)^{3/2} - 1 \right]. \quad (105)$$

### 7.2. Schwarzschild koordinat zamanı

Korunan enerji denklemi

$$\frac{dt}{d\tau} = \left(1 - \frac{r_s}{r}\right)^{-1}. \quad (106)$$

sonucunu verir. (102) ile birleştirildiğinde

$$\frac{dt}{dr} = -\frac{1}{c} \frac{\sqrt{r/r_s}}{1 - r_s/r}. \quad (107)$$

elde edilir.

$$x = \frac{r}{r_s}. \quad (108)$$

olsun. O hâlde

$$\frac{c}{r_s} \frac{dt}{dx} = -\frac{x^{3/2}}{x-1}. \quad (109)$$

$u = \sqrt{x}$  ile

$$\frac{x^{3/2}}{x-1} dx = \frac{2u^4}{u^2-1} du = 2 \left( u^2 + 1 + \frac{1}{u^2-1} \right) du. \quad (110)$$

Bir ters türev

$$F(x) = \frac{2}{3} x^{3/2} + 2x^{1/2} + \ln \left| \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1} \right|. \quad (111)$$

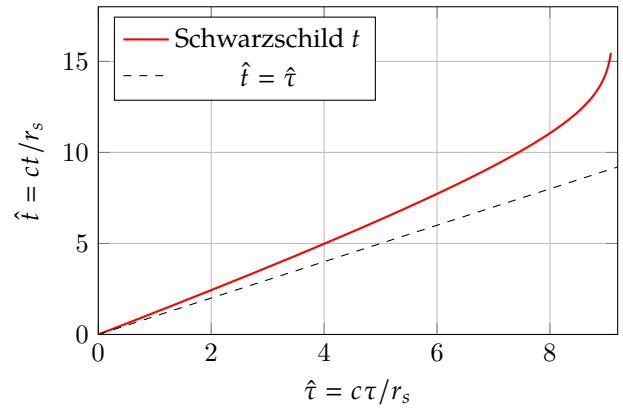
şeklindedir. Böylece

$$\frac{c}{r_s} [t(r) - t(r_0)] = F\left(\frac{r_0}{r_s}\right) - F\left(\frac{r}{r_s}\right). \quad (112)$$

$r \rightarrow r_s^+$  iken  $F$  içindeki logaritma  $-\infty$ 'ye gider ve dolayısıyla

$$t(r) \rightarrow +\infty. \quad (113)$$

Düşen gözlemci ufku sonlu öz zamanda geçer; ancak Schwarzschild koordinat zamanı geçişi  $t = \infty$ 'ye atar.



**Şekil 5.** Sonsuzda durgun hâlden radyal düşüş için koordinat zamanının öz zamana karşı grafiği;  $r_0 = 6r_s$ 'den  $r = 1.05r_s$ 'ye kadar olan parça çizilmiştir. Öz zaman sonlu kalırken, Schwarzschild koordinat zamanı ufka yakın logaritmik olarak büyür.

### 7.3. Koordinat tekiliği ve Eddington–Finkelstein koordinatları

(53) denkleminde  $r = r_s$  konumunda  $g_{rr}$  bileşeninin ıraksaması bir eğrilik tekiliği değildir. Örneğin Kretschmann skaleri

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta} R^{\alpha\beta\gamma\delta} = \frac{12r_s^2}{r^6} = \frac{48G^2M^2}{c^4r^6}, \quad (114)$$

olup  $r = r_s$ 'de sonludur ve yalnızca  $r = 0$ 'da ıraksar.

Kaplumbağa koordinatını

$$r_* = r + r_s \ln \left| \frac{r}{r_s} - 1 \right|. \quad (115)$$

olarak tanımlayın. İçeri giren Eddington–Finkelstein zaman koordinatı

$$v = t + \frac{r_*}{c}. \quad (116)$$

şeklindedir.

$$c dt = c dv - \frac{dr}{1 - r_s/r}, \quad (117)$$

olduğundan, (53) içine yerine yazma

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{r_s}{r}\right) c^2 dv^2 + 2c dv dr + r^2 d\Omega^2. \quad (118)$$

sonucunu verir. (118) içindeki tüm metrik bileşenleri  $r = r_s$ 'de sonludur. Dolayısıyla ufuk, düşen gözlemciler için fiziksel bir tekillik değil, düzenli bir null hiper-yüzeydir.

## 8. Zayıf Alanda Görelî Testler

### 8.1. Günberi devinimi

Zamansı jeodezikler için  $u = 1/r$  tanımlayın. Radyal denklemi  $\dot{\phi} = L/r^2$  ile birleştirmek görelî yörünge denklemini verir:

$$\frac{d^2u}{d\phi^2} + u = \frac{GM}{L^2} + \frac{3GM}{c^2} u^2. \quad (119)$$

İlk iki terim Newtoncu Kepler problemidir; son terim önde gelen Schwarzschild düzeltmesidir. Neredeyse Keplerci bir elips için

$$u_0(\phi) = \frac{GM}{L^2} [1 + e \cos \phi], \quad (120)$$

burada  $e$  dışmerkezliktir. Pertürbasyon kuramı yörünge başına günberi ilerlemesini

$$\Delta\phi = \frac{6\pi GM}{c^2 a(1 - e^2)}, \quad (121)$$

olarak verir; burada  $a$  büyük yarı eksendir. Bu, genel göreliliğin klasik testlerinden biridir.

Merkür için

$$a = 5.7909 \times 10^{10} \text{ m}, \quad e = 0.2056, \quad GM_\odot = 1.3271 \times 10^{20} \text{ m}^3 \text{ s}^{-2} \quad (122)$$

(121) denklemi

$$\Delta\phi = 5.02 \times 10^{-7} \text{ rad orbit}^{-1} = 0.1035 \text{ arcsec orbit}^{-1}. \quad (123)$$

sonucunu verir. Merkür yüz yıl başına yaklaşık 415 yörünge tamamlar; dolayısıyla

$$\Delta\phi_{\text{century}} \approx 43.0 \text{ arcsec century}^{-1}. \quad (124)$$

Bu, Einstein kuramından önce bilinen anormal artık devinimi açıklar [2, 6].

## 8.2. Işık sapması ve zaman gecikmesi

Zayıf alandaki null jeodezikler için, çarpma parametresi  $b$  olan bir ışının önde gelen sapma açısı

$$\alpha = \frac{4GM}{c^2 b}. \quad (125)$$

şeklindedir. Dört çarpanı, saf Newtoncu tanecikçi hesapla önerilen değer iki katıdır: yarısı zamansal eğrilikten, yarısı uzaysal eğrilikten kaynaklanır. Güneş kenarını sıyıran bir ışın için  $b = R_\odot = 6.957 \times 10^8 \text{ m}$  olduğundan

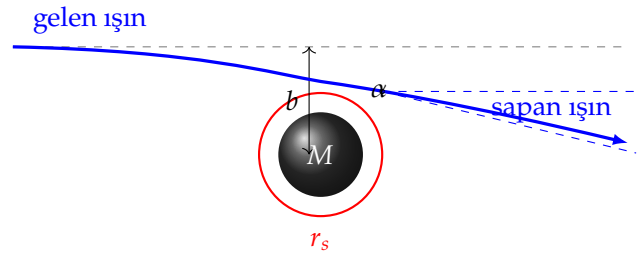
$$\alpha_\odot = 8.49 \times 10^{-6} \text{ rad} = 1.75 \text{ arcsec}. \quad (126)$$

Bu, Eddington ve çalışma arkadaşlarının yönettiği 1919 Güneş tutulması seferi sırasında ölçülen etkidir [4].

Aynı zayıf-alan null geometrisi Shapiro radar zaman gecikmesini öngörür [11]. En yakın yaklaşımı  $b$  olan ve uç noktaları  $r_1$  ve  $r_2$  yarıçaplarında bulunan bir kütlenin yakınından geçen sinyal için, önde gelen gidiş-dönüşten bağımsız tek-yönlü ek gecikme

$$\Delta t_{\text{Shapiro}} = \frac{2GM}{c^3} \ln \left( \frac{4r_1 r_2}{b^2} \right). \quad (127)$$

şeklindedir. Logaritma, zayıf Schwarzschild potansiyelinin neredeyse doğrusal bir ışık yolu boyunca integre edilmesinin imzasıdır. Dünya ve bir iç gezegeni içeren üst kavuşum deneyleri için etki, modern zamanlama duyarlılığından çok daha büyük, yüzlerce mikrosaniye mertebesindedir.



**Şekil 6.** Kompakt bir kütle tarafından zayıf-alan ışık bükülmesi. Çarpma parametresi  $b$  ile geçen bir foton, önde gelen mertebede  $\alpha = 4GM/(c^2 b)$  kadar saptırılır.

## 9. Çözülmüş Sayısal Uygulamalar

Karakteristik Schwarzschild ölçeklerini toplamak yararlıdır. Bir Güneş kütlesi için

$$\frac{GM_\odot}{c^2} = 1.4766 \text{ km}, \quad r_s(M_\odot) = 2.9533 \text{ km}. \quad (128)$$

Kütlesi  $M$  olan bir Schwarzschild kara deliği için ISCO yarıçapı

$$r_{\text{ISCO}} = 8.8599 \left( \frac{M}{M_\odot} \right) \text{ km}. \quad (129)$$

Foton küresi yarıçapı

$$r_{\text{ph}} = 4.4299 \left( \frac{M}{M_\odot} \right) \text{ km}. \quad (130)$$

Gölge yarıçapı

$$b_{\text{crit}} = 7.672 \left( \frac{M}{M_\odot} \right) \text{ km}. \quad (131)$$

şeklindedir.

Sgr A\* için

$$M_{\text{SgrA}^*} = 4.3 \times 10^6 M_\odot, \quad (132)$$

alındığında

$$r_s = 1.27 \times 10^7 \text{ km} = 0.085 \text{ AU}. \quad (133)$$

bulunur. Schwarzschild gölge çapı yaklaşık olarak

$$2b_{\text{crit}} = 6.60 \times 10^7 \text{ km} = 0.441 \text{ AU}. \quad (134)$$

olur.  $D \approx 8.2 \text{ kpc}$  uzaklıkta bu, açısal çap olarak

$$\theta_{\text{sh}} \approx \frac{2b_{\text{crit}}}{D} = 53.8 \mu\text{as}. \quad (135)$$

değerine karşılık gelir. Bu, ufuk-ölçekli çok uzun baz çizgili interferometriyle gözlenen mertebededir.

M87\* için

$$M_{\text{M87}^*} = 6.5 \times 10^9 M_\odot, \quad D = 16.8 \text{ Mpc}. \quad (136)$$

kullanın. O hâlde

$$b_{\text{crit}} = 4.99 \times 10^{10} \text{ km} = 333 \text{ AU}. \quad (137)$$

**Tablo 1.** Seçilmiş kütleler için karakteristik Schwarzschild yarıçapları. Değerler  $M$  ile doğrusal ölçeklenir.

| Cisim       | $r_s$                    | $r_{ph}$                 | $r_{ISCO}$               |
|-------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| $1M_\odot$  | 2.95 km                  | 4.43 km                  | 8.86 km                  |
| $10M_\odot$ | 29.5 km                  | 44.3 km                  | 88.6 km                  |
| Sgr A*      | $1.27 \times 10^7$ km    | $1.90 \times 10^7$ km    | $3.81 \times 10^7$ km    |
| M87*        | $1.92 \times 10^{10}$ km | $2.88 \times 10^{10}$ km | $5.76 \times 10^{10}$ km |

Açısal çap

$$\theta_{\text{diam}} \simeq \frac{2b_{\text{crit}}}{D} = 39.7 \mu\text{as}, \quad (138)$$

olup spin, ışın geometrisi, plazma fiziği ve merceklenme aktarımı dâhil edildiğinde mertebesi 40–45  $\mu\text{as}$  olan EHT halka çapıyla uyumludur [15, 16].

Son bir sayısal örnek olarak,  $r = 10r_s$  yarıçapındaki bir saati düşünelim. (55) denklemden

$$\frac{d\tau}{dt} = \sqrt{1 - \frac{1}{10}} = 0.9487. \quad (139)$$

elde edilir.  $10r_s$  konumundaki statik bir saat, sonsuzdaki bir saate göre yaklaşık 5.13% daha yavaş çalışır.  $r = 2r_s$  konumunda

$$\frac{d\tau}{dt} = \frac{1}{\sqrt{2}} = 0.7071, \quad (140)$$

ve sonsuza kütleçekimsel kırmızıya kayma

$$z = \sqrt{2} - 1 = 0.414. \quad (141)$$

olur.

### 9.1. Ek çözülmüş örnek: bir nötron yıldızı dışı

Aynı dış metriğin yararlı bir uygulaması dönmeyen bir nötron yıldızıdır.

$$M = 1.4M_\odot, \quad R = 12 \text{ km}. \quad (142)$$

alalım. Dış Schwarzschild yarıçapı

$$r_s = 2.9533(1.4) \text{ km} = 4.13 \text{ km}. \quad (143)$$

olur. Dolayısıyla kompaktlık

$$\frac{GM}{Rc^2} = \frac{r_s}{2R} = 0.172. \quad (144)$$

şeklinde. Yıldız yüzeyinden yayılan ve sonsuzda alınan bir fotonun kırmızıya kayması

$$z = \left(1 - \frac{4.13}{12}\right)^{-1/2} - 1 = 0.235. \quad (145)$$

olur. Böylece durgun dalga boyu  $\lambda_e$  olan bir atomik çizgi

$$\lambda_\infty = (1 + z)\lambda_e = 1.235 \lambda_e. \quad (146)$$

konumunda saptanırdı. Karşılaştırma için, (63) denklemden yüzey öz ivmesi

$$a_R = \frac{GM}{R^2\sqrt{1 - r_s/R}} = 1.59 \times 10^{12} \text{ m s}^{-2}. \quad (147)$$

şeklinde. Bu, yerçekiminin yaklaşık  $1.6 \times 10^{11}$  katıdır. Hesaplama, kompakt-yıldız tayflarının, tanımlanabildiklerinde, cisim kara delik olmasa bile görelî kütleçekimi neden yokladığını gösterir.

Aynı parametreler yıldız yarıçapında dış dairesel yörünge frekansını

$$f_{\text{orb}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{GM}{R^3}} = 1.65 \times 10^3 \text{ Hz}. \quad (148)$$

olarak verir. Bu özel yuvarlatılmış sayılar için  $R > r_{\text{ISCO}} = 6GM/c^2 = 12.4 \text{ km}$  ancak marjinal olarak yanlış olduğundan, kütle veya yarıçaptaki mütevazı değişiklikler en iç diskin yıldız yüzeyiyle mi yoksa görelî ISCO ile mi sonlandığını belirler. Bu, X-ışını çiftlerindeki kilohertz değişkenliğinin nötron yıldızlarının kompaktlığına duyarlı olmasının nedenlerinden biridir [10].

### 9.2. Ek çözülmüş örnek: Güneş Shapiro gecikmesi

Dünya'dan Güneş'in uzak tarafındaki bir uzay aracına gönderilen radar sinyali için

$$r_1 = 1.00 \text{ AU}, \quad r_2 = 1.50 \text{ AU}, \quad b = R_\odot. \quad (149)$$

olsun.  $GM_\odot/c^3 = 4.9255 \mu\text{s}$  ve (127) kullanılarak

$$\ln\left(\frac{4r_1r_2}{b^2}\right) = \ln\left[\frac{4(1.496 \times 10^{11})(2.244 \times 10^{11})}{(6.957 \times 10^8)^2}\right] \quad (150)$$

$$= 12.53. \quad (151)$$

bulunur. Tek yönlü gecikme o hâlde

$$\Delta t_{\text{Shapiro}} = 2(4.9255 \mu\text{s})(12.53) = 123 \mu\text{s}. \quad (152)$$

olur. İki yönlü bir radar deneyi bu önde gelen katkıyı iki katına çıkarır. Ölçüm kara delik anlamında bir kuvvetli-alan testi değildir; ancak Schwarzschild metriğinde kodlanan uzaysal eğriliğin duyarlı bir sondasıdır.

## 10. Genişletmeler, Genellemeler ve Gözlemsel Tanı Kriterleri

Schwarzschild metriği, vakumda yüksüz, dönmeyen, asimptotik olarak düz bir cismin dış çözümüdür. Bu niteleyicilerden herhangi birini gevşetmek yararlı genellemelere götürür. Kozmolojik sabit ile vakum alan denklemleri

$$G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = 0, \quad (153)$$

olur ve küresel simetrik çözüm Schwarzschild–de Sitter veya Schwarzschild–anti-de Sitter şeklindedir:

$$ds^2 = -f_\Lambda(r)c^2dt^2 + f_\Lambda(r)^{-1}dr^2 + r^2d\Omega^2, \quad (154)$$

burada

$$f_\Lambda(r) = 1 - \frac{r_s}{r} - \frac{\Lambda r^2}{3}. \quad (155)$$

Astrofiziksel kara delikler için  $\Lambda r^2$  ufuk yakınında normalde ihmal edilebilir; ancak terim kavramsal olarak önemlidir çünkü  $\Lambda > 0$  olduğunda kozmolojik bir ufuk getirir.

Merkezi cisim elektrik yükü  $Q$  taşıyorsa, dış elektrovakum geometrisi Schwarzschild değil Reissner–Nordstrom geometrisidir:

$$f_Q(r) = 1 - \frac{2GM}{c^2r} + \frac{GQ^2}{4\pi\epsilon_0 c^4 r^2}. \quad (156)$$

Astrofiziksel kara deliklerin hemen hemen yüksüz olması beklenir; çünkü çevredeki plazma büyük elektrik alanlarını etkin biçimde boşaltır. Ancak (156), iç ve dış ufuflara sahip en basit örnek olarak kuramsal açıdan önemlidir. Dönme astrofiziksel olarak çok daha önemlidir. Kerr uzay-zamanında tek Schwarzschild foton küresi bir foton bölgesiyle yer değiştirir, ISCO yörüngesel hareketin yönüne bağlıdır ve çerçeve sürüklenmesi zamansal ve azimutal hareketi bağlar [7].

Duyarlı testler, genel görelilikten zayıf-alan sapmalarını sıklıkla parametrize edilmiş post-Newtoncu parametreler  $\beta$  ve  $\gamma$  ile betimler [14]. İzotropik zayıf-alan biçiminde

$$g_{tt} = -c^2 \left[ 1 - \frac{2GM}{c^2r} + 2\beta \left( \frac{GM}{c^2r} \right)^2 \right], \quad (157)$$

$$g_{rr} = 1 + 2\gamma \frac{GM}{c^2r}. \quad (158)$$

Genel görelilik

$$\beta = 1, \quad \gamma = 1. \quad (159)$$

öngörüsünde bulunur. Önde gelen ışık sapma açısı

$$\alpha_{\text{PPN}} = (1 + \gamma) \frac{2GM}{c^2b}, \quad (160)$$

olurken, günberi ilerlemesi

$$\Delta\phi_{\text{PPN}} = \frac{6\pi GM}{c^2a(1-e^2)} \left( \frac{2+2\gamma-\beta}{3} \right). \quad (161)$$

şeklindedir. Schwarzschild sonuçları (159) yerine konarak geri elde edilir. Bu formüller, ışık yayılımı ve yörüngesel devrimin metrik katsayılarının tamamlayıcı bileşimlerini neden test ettiğini gösterir.

Kuvvetli-alan gözlemleri tek bir parametreyle daha zor özetlenir; ancak Schwarzschild çözümü yine de yararlı tanı kriterleri sağlar. Birincisi, gölge açılma çapı (99) aracılığıyla  $M/D$  ile doğrusal ölçeklenir. İkincisi, termal ince-disk tayfları (85) verimi aracılığıyla ISCO'ya

bağlıdır. Üçüncüsü, yüksek frekanslı yarı-periyodik olgular, eğer yörüngesel veya episiklik hareketle ilişkilendirilirse, (88) ve (91) aracılığıyla yaklaşık olarak  $M^{-1}$  ile ölçeklenir. Son olarak, kompakt çiftlerden gelen kütleçekim dalgaları, test-kütle limitinde Schwarzschild geometrisini ve daha genel olarak doğrusal olmayan iki-cisim problemini yoklar; geç içe-sarmal ve çınlama frekansları aynı görelî uzunluk ölçeği  $GM/c^2$  tarafından belirlenir.

## 11. Tartışma

Yukarıdaki türetim birkaç varsayıma dayanır. Birincisi, uzay-zaman kütleçekimsel cismin dışında vakumdur. Bu, çevredeki gaz, ısıtım ve manyetik alanlar gerilme-enerjiye ihmal edilebilir katkıda bulunduğu bir yıldızın veya kara deliğin dışı için doğrudur. Yığılma yapan sistemlerde Schwarzschild metriği genellikle sabit bir arka plan yaklaşıklığıdır; plazma dinamiği ve ısıtım aktarımı ise ayrı olarak ele alınır. İkincisi, çözüm dönmemektedir. Gerçek astrofiziksel kara deliklerin dönmesi beklenir; çünkü açısal momentum kütleçekimsel çöküş ve yığılmada her yerde bulunur. Dış geometrileri, ufuk yarıçapı, ISCO, foton bölgesi ve gölgesi spine ve gözlemci eğimine bağlı olan Kerr çözümüyle betimlenir [7, 5]. Bununla birlikte Schwarzschild, tam sıfır-spin limiti ve ufuk oluşumunun en açık modeli olarak kalır.

Üçüncüsü, (53) denkleminde kullanılan koordinatlar küresel olarak düzenli değildir.  $r = r_s$  konumunda  $g_{rr}$  bileşeninin ıraksaması, eğrilik tekilliği değil, kutupsal koordinat tekilliğine benzer bir koordinat tekilliğidir. Eddington–Finkelstein koordinatları, içeri düşen ışık ışınlarının ve parçacıkların ufku düzgün biçimde geçtiğini gösterir. Gerçek değişmez tekillik  $r = 0$  konumundadır; burada (114) ıraksar ve klasik genel görelilik jeodezik eksiklik öngörür.

Etkin potansiyel biçimciliği doğrudan fiziksel kavrayış sağlar. Newtoncu kütleçekimde,  $1/r$  potansiyeli için tüm yarıçaplarda kararlı dairesel yörüngeler vardır. Schwarzschild uzay-zamanında, açısal bariyeri çarpan  $1 - r_s/r$  faktörü potansiyelin bir iç maksimum geliştirmesine ve sonunda minimumunu kaybetmesine yol açar. ISCO'nun var olmasının nedeni budur. ISCO madde bir yüzey değildir; aksine dinamik bir geçiş yarıçapıdır. İnce-disk kuramında gaz, ISCO'nun dışında viskoz açısal-momentum taşınımı yoluyla yavaşça içeri sarmalanır ve onun içinde hızla dalışa geçer [12, 13]. ISCO'daki bağlanma enerjisi kanonik Schwarzschild yığılma verimi olan 5.7% değerini verir.

Foton dinamiği daha da kuvvetli biçimde görelidir.  $r = 1.5r_s$  konumundaki foton küresi olay ufkunun dışında, fakat ISCO'nun içindedir. Kararsızdır: küçük bir dışa doğru pertürbasyon kaçışa izin verirken, küçük bir içe doğru pertürbasyon yakalanmaya yol açar. Kritik çarpma parametresi  $b_{\text{crit}} = \sqrt{27}GM/c^2$ , optik olarak ince ışıma ile aydınlatılan bir Schwarzschild kara deliği için idealleştirilmiş gölge sınırını tanımlar. Gerçek görünümler plazma yayma gücüne, soğurmaya, Doppler

güçlenmesine, kütleçekimsel kırmızıya kaymaya, spine, türbülansa ve alet yanıtına bağlıdır. Dolayısıyla M87\* ve Sgr A\* EHT gözlemleri, olay ufku madde- sel bir kenar olarak doğrudan göstermez; bunun yerine, karakteristik açısal ölçeği foton yakalanma bölgesi tara- fından belirlenen merceklenmiş bir ışımaya morfolojisini ortaya koyar [15, 16].

Burada tartışılan zayıf-alan öngörülleri, genel göre- liliğin en önemli ampirik başarıları arasında kalmaya devam etmektedir. Merkür'ün günberi ilerlemesi Sch- warzschild alanının zamansı jeodezik yapısını test eder. Güneş ışık sapması null jeodezikleri ve uzaysal eğriliği test eder. Kütleçekimsel kırmızıya kayma metriğin za- man bileşenini test eder. Radar zaman gecikmesi, çift pulsarlar, Sgr A\* etrafındaki yıldız yörüngeleri, kütleçe- kim dalgası saptamaları ve kara delik görüntüleme dâ- hil modern ölçümler, bu testleri giderek daha kuvvetli- alan rejimlerine genişletmektedir [11, 14, 15].

Son olarak, Birkhoff teoreminin ima ettiği teklik aşı- rı genişletilmemelidir. Teorem, küresel simetrik vakum bölgeleri için geçerlidir. Tüm kompakt cisimlerin Sc- warzschild olduğunu söylemez; küresel olmayan çö- küşte, madde alanlarının varlığında veya değiştirilmiş kütleçekim kuramlarında da geçerli değildir. Yine de, statik küresel bir yıldızın dışı ile dönmeyen bir kara de- liğin dışının yıldız yüzeyinin veya ufkun dışındaki aynı yerel metriği paylaşmasının nedeni budur.

## 12. Sonuç

İki bilinmeyen fonksiyon  $A(r)$  ve  $B(r)$  içeren statik kü- resel simetrik ansatzdan başlayarak, Christoffel sem- bollerini ve Ricci tensörü bileşenlerini açıkça hesapla- dık ve vakum Einstein denklemlerini çözdük. Denklemler, asimptotik düzlük dayatıldıktan sonra ilk olarak  $A(r)B(r) = 1$  sonucunu verir. Açısal denklem daha son- ra  $A(r) = 1 + C/r$  sonucunu verir ve Newtoncu zayıf- alan limiti  $C = -2GM/c^2$  değerini belirler. Elde edilen Schwarzschild metriği, tekil asimptotik olarak düz kü- resel simetrik vakum çözümüdür.

Jeodezik analiz metriğin fiziksel içeriğini ortaya ko- yar. Kütleli parçacıklar

$$V_{\text{eff}} = (1 - r_s/r)(c^2 + L^2/r^2), \quad (162)$$

etkin potansiyelinde hareket eder; bu potansiyel yalnız- ca  $r > 3r_s$  için kararlı dairesel yörüngeler,  $r = 3r_s = 6GM/c^2$  konumunda ISCO ve  $r = 2r_s$  konumunda marjinal bağlı yörünge verir. Fotonlar  $r = 1.5r_s$  ko- numunda kararsız dairesel yörüngeye sahiptir ve bu  $\sqrt{27}GM/c^2$  gölge yarıçapını üretir. Radyal düşüş, uf- ka sonlu öz zamanda fakat sonsuz Schwarzschild koor- dinat zamanında ulaşıldığını gösterirken, Eddington- Finkelstein koordinatları ufkun düzenliliğini ortaya ko- yar. Aynı geometri kütleçekimsel kırmızıya kaymayı, Merkür'ün anomal günberi devinimini, Güneş ışık sap- masını, Shapiro gecikmesini, kompakt-yıldız yüzey kı- rıma kaymalarını ve M87\*'nin EHT görüntüsü gibi ufuk-çözünürlüklü gözlemlerin karakteristik açısal öl- çeğini nicel olarak açıklar.

## A. Yörünge Denklemleri için Cebirsel Ay- rıntılar

Bu ek, radyal ilk integralden zayıf-alan devinim hesa- bında kullanılan yörünge denkleminde götüren ara cebi- ri kaydeder. Zamansı hareket için  $u = 1/r$  yazın ve

$$\dot{r} = \frac{dr}{d\phi} \dot{\phi} = -L \frac{du}{d\phi}. \quad (163)$$

kullanın. (69) içine yerine koyun

$$L^2 \left( \frac{du}{d\phi} \right)^2 + (1 - r_s u) (c^2 + L^2 u^2) = \frac{E^2}{c^2}. \quad (164)$$

sonucunu verir. Potansiyel terimlerini açmak

$$L^2 u'^2 + c^2 - c^2 r_s u + L^2 u^2 - r_s L^2 u^3 = \frac{E^2}{c^2}, \quad (165)$$

ifadesini verir; burada  $u' = du/d\phi$ .  $\phi'$ 'ye göre türev alıp dairesel olmayan parçalar için  $2L^2 u'$  ile bölmek

$$\frac{d^2 u}{d\phi^2} + u = \frac{c^2 r_s}{2L^2} + \frac{3r_s}{2} u^2. \quad (166)$$

sonucunu verir.  $r_s = 2GM/c^2$  olduğundan, bu

$$\frac{d^2 u}{d\phi^2} + u = \frac{GM}{L^2} + \frac{3GM}{c^2} u^2, \quad (167)$$

biçimine gelir; bu da (119) denklemdir.

Null hareket için benzer hesaplama

$$L_\gamma^2 \left( \frac{du}{d\phi} \right)^2 + (1 - r_s u) L_\gamma^2 u^2 = \frac{E_\gamma^2}{c^2}. \quad (168)$$

ile başlar.  $L_\gamma^2$  ile bölme ve türev alma sonrasında

$$\frac{d^2 u}{d\phi^2} + u = \frac{3r_s}{2} u^2 = \frac{3GM}{c^2} u^2. \quad (169)$$

elde edilir. Zayıf-alan limitinde sağ taraf sıfırcı mer- tebe doğrusal yörünge üzerinde değerlendirilebilir ve önde gelen ışık sapması (125) elde edilir.

Episiklik sonuç (91), radyal denklemin  $r = r_0 + \delta r$  da- ireysel yörüngesi etrafında açılmasından çıkar.  $V'_{\text{eff}}(r_0) = 0$  ile

$$\frac{d^2 \delta r}{d\tau^2} + \frac{1}{2} V''_{\text{eff}}(r_0) \delta r = 0. \quad (170)$$

Dolayısıyla öz-zaman radyal frekansı

$$\omega_r^2 = \frac{1}{2} V''_{\text{eff}}(r_0) = \frac{c^2 r_s (r_0 - 3r_s)}{r_0^3 (2r_0 - 3r_s)}. \quad (171)$$

olur.  $dt/d\tau$  için dairesel-yörünge değerini kullanarak öz zamandan koordinat zamanına geçmek

$$\left( \frac{dt}{d\tau} \right)^2 = \frac{r_0}{r_0 - \frac{3}{2} r_s}. \quad (172)$$

sonucunu verir. Böylece

$$\kappa^2 = \omega_r^2 \left( \frac{dt}{d\tau} \right)^2 = \frac{GM}{r_0^3} \left( 1 - \frac{3r_s}{r_0} \right), \quad (173)$$

(91) içinde belirtildiği gibi elde edilir.

## Kaynaklar

- [1] K. Schwarzschild, “Über das Gravitationsfeld eines Massenpunktes nach der Einsteinschen Theorie,” *Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften*, 189–196 (1916).
- [2] A. Einstein, “Die Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie,” *Annalen der Physik* **49**, 769–822 (1916).
- [3] G. D. Birkhoff, *Relativity and Modern Physics*, Harvard University Press, Cambridge (1923).
- [4] A. S. Eddington, *Space, Time and Gravitation*, Cambridge University Press, Cambridge (1920).
- [5] C. W. Misner, K. S. Thorne, and J. A. Wheeler, *Gravitation*, W. H. Freeman, San Francisco (1973).
- [6] S. Weinberg, *Gravitation and Cosmology*, Wiley, New York (1972).
- [7] S. Chandrasekhar, *The Mathematical Theory of Black Holes*, Oxford University Press, Oxford (1983).
- [8] R. M. Wald, *General Relativity*, University of Chicago Press, Chicago (1984).
- [9] S. M. Carroll, *Spacetime and Geometry: An Introduction to General Relativity*, Addison-Wesley, San Francisco (2004).
- [10] B. W. Carroll and D. A. Ostlie, *An Introduction to Modern Astrophysics*, 2. baskı, Cambridge University Press, Cambridge (2017).
- [11] I. I. Shapiro, “Fourth test of general relativity,” *Physical Review Letters* **13**, 789–791 (1964).
- [12] N. I. Shakura and R. A. Sunyaev, “Black holes in binary systems. Observational appearance,” *Astronomy and Astrophysics* **24**, 337–355 (1973).
- [13] I. D. Novikov and K. S. Thorne, “Astrophysics of black holes,” içinde *Black Holes*, derleyen C. DeWitt and B. S. DeWitt, Gordon and Breach, New York, 343–450 (1973).
- [14] C. M. Will, “The confrontation between general relativity and experiment,” *Living Reviews in Relativity* **17**, 4 (2014).
- [15] Event Horizon Telescope Collaboration, “First M87 Event Horizon Telescope Results. I. The shadow of the supermassive black hole,” *Astrophysical Journal Letters* **875**, L1 (2019).
- [16] Event Horizon Telescope Collaboration, “First M87 Event Horizon Telescope Results. VI. The shadow and mass of the central black hole,” *Astrophysical Journal Letters* **875**, L6 (2019).