



GALAKTİK DİNAMİK

Jeans Denklemleri, Galaktik Dönme Eğrileri ve NFW Karanlık Madde Potansiyel Profili

Akademik Araştırma Makalesi

Teorik Astrofizik — Adım Adım Analitik Türetimler, Vektör Diyagramları ve Sayısal Tablolar

Jeans Denklemleri, Galaktik Dönme Eğrileri ve NFW Karanlık Madde Potansiyel Profili

Galaktik Dinamik

Eylül 2026

Özet. Galaktik dinamik, yıldızlar ve gaz için gözlenen hareketleri, ışıklı ve karanlık madde tarafından üretilen kütleçekim alanıyla ilişkilendirir. Bu makale, çarpışmasız Boltzmann denkleminin, hız momentlerinin ve Jeans denklemlerinin kendi içinde bütünlüklü bir türetimini sunmakta; faz-uzayı dinamiğinin hangi varsayımlar altında pratik bir kütle kestiricisine dönüştüğünü vurgulamaktadır. Hız anizotropisi içeren küresel Jeans denklemini, silindirik Jeans denklemini ve asimetrik sürüklenmeyi, ayrıca Güneş yakınındaki karanlık madde yoğunluğunu çıkarmakta kullanılan yerel düşey Jeans denklemini türetiyoruz. Ardından bu dinamik araçları galaktik dönme eğrileriyle ilişkilendirerek, noktasal bir kütle için neden Kepler tipi bir azalma verdiğini, tekil izotermal bir kürenin neden tam olarak düz bir eğri ürettiğini ve sarmal galaksilerde gözlenen eğrilerin karanlık haloları neden gündeme getirdiğini gösteriyoruz. Navarro–Frenk–White profili ayrıntılı biçimde ele alınmaktadır: çevrelenen kütle, kütleçekim potansiyeli, dairesel hız eğrisi, maksimum hız, logaritmik eğimler, konsantrasyon, virial kütle ve karakteristik yoğunluk–konsantrasyon ilişkisi açıkça türetilmektedir. Çalışılmış sayısal uygulamalar Samanyolu benzeri haloları, küce küresel galaksi kütle kestirimlerini, asimetrik sürüklenmeyi ve yerel karanlık madde yoğunluğunu içerir. Makale, Jeans modellemesinin sınırlılıkları, tepe–çekirdek problemi ve soğuk karanlık madde halo profillerinin gözlemsel durumu ile sonlandırılmaktadır.

Anahtar Kelimeler: galaktik dinamik; Jeans denklemleri; dönme eğrileri; karanlık madde haloları; NFW profili; küce küresel galaksiler; yerel karanlık madde yoğunluğu

1. Giriş

Galaktik dinamiğin temel çıkarım problemi aldatıcı biçimde basittir: izleyicilerin konumları ve hızları verildiğinde, kütleçekim potansiyelini ve dolayısıyla kütle dağılımını belirlemek. Zorluk, galaksilerdeki yıldızların çarpışmalı gaz parçacıkları olmamasından kaynaklanır. Ortalama serbest yolları sistem boyutundan çok daha büyüktür, iki-cisim gevşeme zamanları normalde Hubble zamanından uzundur ve hareketleri yerel termodinamik dengeye yaklaşmak yerine faz-uzayı yapısını korur. Bu nedenle galaktik dinamik, Vlasov denklemi olarak da adlandırılan çarpışmasız Boltzmann denklemi ve onun hız momentleri olan Jeans denklemleri üzerine kuruludur.

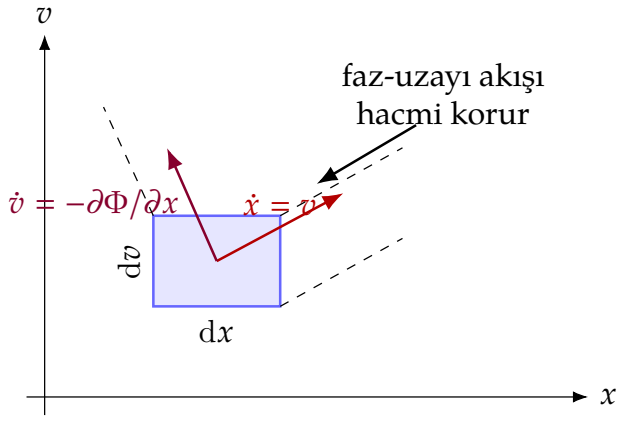
Tarihsel olarak, Jeans’in yıldız hareketlerine ilişkin analizi [1] ve Eddington’ın dağılım fonksiyonu yöntemleri [2], yıldız sistemlerinin çarpışmalı akışkanlar olmaksızın istatistiksel olarak ele alınabileceğini göstermiştir. Chandrasekhar’ın yıldız karşılaşmaları kuramı [3], çarpışmasız yaklaşımın ne zaman geçerli olduğunu açıklığa kavuşturmuştur. Modern sentezler [4, 5]’de verilmiştir. Yirminci yüzyılın ikinci yarısında galaktik dönme eğrileri, bu biçimsel araçları ışık yaymayan madde için kanıtla dönüştürmüştür. Rubin, Ford ve çalışma arkadaşları sarmal galaksilerde neredeyse düz dönme eğrileri bulmuş [6], Bosma ise geniş nötr-hidrojen disklerinin aynı olguyu optik yarıçapın çok ötesine kadar izlediğini göstermiştir [7]. Kütlelerin çoğu yıldız ışığını izleseydi, dairesel hızların büyük yarıçaplarda yaklaşık $r^{-1/2}$ olarak azalması gerekirdi; bunun yerine birçok galaksi onlarca kiloparsek boyunca $v_c(r) \approx \text{sabit}$ göstermektedir.

Soğuk karanlık madde kozmolojik simülasyonları bu problemi öngörüselle hâle getirmiştir. Navarro, Frenk ve White, simüle edilen haloların iki parametrelili bir yoğunluk profiliyle iyi betimlendiğini bulmuştur,

$$\rho(r) = \frac{\rho_s}{(r/r_s)(1 + r/r_s)^2}, \quad (1)$$

bu profilin iç logaritmik eğimi -1 , dış eğimi ise -3 ’tür [8, 9]. Denklem (1) yalnızca kullanışlı bir uyum fonksiyonu değildir; galaktik kinematiği virial kütle ve konsantrasyon üzerinden kozmolojik yapı oluşumuna bağlar. Bununla birlikte aynı profil kalıcı bir gerilim üretir: birçok küce ve düşük yüzey parlaklıklı galaksi, tepe yapılarına kıyasla Burkert profili gibi sabit yoğunluklu çekirdeklerle daha iyi modelleniyor görünmektedir [10]. Bu, tepe–çekirdek problemidir.

Bu makalenin amacı pedagojik fakat titizdir. Kinetik denklemleri faz-uzayı sürekliliğinden türetiyor, Jeans denklemlerini adım adım elde ediyor ve bunları dönme eğrilerine, küce küresel galaksilere, disk kinematiğine ve NFW halolarına uyguluyoruz. Her denklemin fiziksel içeriğini vurguluyoruz: bir yıldız sistemini hangi gerilmenin desteklediğini, anizotropinin kütle kestirimine nasıl girdiğini, basınç desteğinin yıldız dönmesini neden dairesel dönmeden daha yavaş kıldığını ve bir halo yoğunluk profilinin şeklinin dairesel hız eğrisine nasıl yansıdığını.



Şekil 1. Hamiltonyen akış tarafından sürüklenen bir faz-uzayı elemanı. Bu hareketli hacimde izleyici sayısının korunumu çarpışmasız Boltzmann denklemini verir.

2. Fiziksel ve Matematiksel Çerçeve

2.1. Faz uzayı ve dağılım fonksiyonları

Tanım 1. Tek-parçacık dağılım fonksiyonu $f(x, v, t)$, bir faz-uzay hacim elemanındaki yıldız sayısı

$$dN = f(x, v, t) d^3x d^3v. \quad (2)$$

olacak şekilde tanımlanır. Bunun sıfıncı hız momenti sayı yoğunluğunu verir,

$$v(x, t) = \int f(x, v, t) d^3v. \quad (3)$$

Tüm izleyiciler aynı kütleye m_* sahipse, izleyici kütle yoğunluğu $\rho_* = m_* v$ olur. Ancak Jeans modellemesinde izleyici yoğunluğu v kütleçekim üreten yoğunluğa ρ eşit olmak zorunda değildir. Cüce küresel galaksiler en temiz örneği sağlar: görünür yıldızlar potansiyeli izler, fakat baskın kütle karanlıktır.

Herhangi bir hız fonksiyonunun $q(v)$ ortalaması

$$v\langle q \rangle = \int q(v) f(x, v, t) d^3v. \quad (4)$$

ile verilir. Özellikle,

$$\bar{v}_i = \langle v_i \rangle, \quad \sigma_{ij}^2 = \langle (v_i - \bar{v}_i)(v_j - \bar{v}_j) \rangle. \quad (5)$$

$v\sigma_{ij}^2$ tensörü basıncın yıldızsal benzeridir, fakat genellikle anizotropiktir.

2.2. Kütleçekim ve dairesel hız

Kütleçekim potansiyeli Poisson denklemini sağlar,

$$\nabla^2 \Phi = 4\pi G \rho, \quad (6)$$

burada ρ toplam kütleçekim üreten yoğunluktur. Küresel simetride,

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\Phi}{dr} \right) = 4\pi G \rho(r). \quad (7)$$

Çevrelenen kütle

$$M(r) = 4\pi \int_0^r \rho(s) s^2 ds, \quad (8)$$

olup (7)'nin integrasyonu

$$\frac{d\Phi}{dr} = \frac{GM(r)}{r^2}. \quad (9)$$

ifadesini verir. Dairesel bir yörünge merkezkaç dengesini sağlar,

$$\frac{v_c^2}{r} = \frac{d\Phi}{dr}, \quad (10)$$

dolayısıyla

$$v_c^2(r) = \frac{GM(r)}{r}. \quad (11)$$

Böylece bir dönme eğrisi ancak dairesel hareket ve küresel simetri altında doğrudan bir kütle profilidir; gerçek disk galaksiler disk geometrisi, basınç desteği, çubuklar, bükülmeler ve dairesel olmayan akışlar için düzeltmeler gerektirir.

3. Çarpışmasız Boltzmann Denklemleri

3.1. Faz-uzayı sürekliliğinden türetim

Altı boyutlu faz-uzayı koordinatını

$$\mathbf{w} = (x, v). \quad (12)$$

olarak düşünelim. Faz-uzayı akış hızı

$$\dot{\mathbf{w}} = (\dot{x}, \dot{v}) = (v, -\nabla \Phi). \quad (13)$$

şeklinde. Faz uzayında izleyici sayısının korunumu

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \nabla_{\mathbf{w}} \cdot (f \dot{\mathbf{w}}) = 0. \quad (14)$$

koşulunu gerektirir. Altı boyutlu diverjans açılırsa

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \nabla_x \cdot (f \mathbf{v}) + \nabla_v \cdot [-f \nabla \Phi] = 0. \quad (15)$$

elde edilir. v, x 'ten bağımsız ve $\nabla \Phi, v$ 'den bağımsız olduğundan,

$$\nabla_x \cdot (f \mathbf{v}) = \mathbf{v} \cdot \nabla_x f, \quad (16)$$

$$\nabla_v \cdot [-f \nabla \Phi] = -(\nabla \Phi) \cdot \nabla_v f. \quad (17)$$

Buna göre

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla_x f - (\nabla \Phi) \cdot \nabla_v f = 0. \quad (18)$$

İndis gösteriminde bu,

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v_i \frac{\partial f}{\partial x_i} - \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial v_i} = 0, \quad (19)$$

olup tekrarlanan indisler üzerinden toplama yapılır.

Teorem 1 (Çarpışmasız Boltzmann denklemi). *Yakın karşılaşmaların ihmal edilebildiği bir yıldız sistemi için dağılım fonksiyonu faz-uzayı karakteristikleri boyunca korunur:*

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \dot{\mathbf{x}} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} f + \dot{\mathbf{v}} \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f = 0. \quad (20)$$

Fiziksel anlam Liouville korunumudur: yıldızlar faz uzayında yaratılma, yok olma veya çarpışmalı difüzyon olmadan hareket eder. f 'nin sabit bir noktada değişmesinin tek yolu, o noktadan adveksiyonla taşınmasıdır.

Çarpışmasız yaklaşım, iki-cisim gevşeme zamanı büyük olduğunda doğrudur. N karşılaştırılabilir parçacıktan oluşan bir sistem için,

$$t_{\text{rel}} \approx \frac{0.1N}{\ln N} t_{\text{cross}}, \quad (21)$$

burada $t_{\text{cross}} \sim R/\sigma$. $N \sim 10^{11}$ olan bir galakside t_{rel} Evren'in yaşı aşar. Çok daha küçük N değerlerine sahip küresel kümeler daha az çarpışmasızdır ve ek fizik gerektirir.

3.2. Durağan durumlar ve Jeans teoremi

Potansiyel zamandan bağımsızsa, durağan bir dağılım

$$\mathbf{v} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} f - (\nabla \Phi) \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f = 0. \quad (22)$$

sağlar. Hareketin yalıtkan integrallerinin herhangi bir fonksiyonu bir çözümdür. Örneğin küresel bir potansiyelde özgül enerji

$$E = \frac{1}{2}v^2 + \Phi(r) \quad (23)$$

ve açısal momentum

$$L^2 = r^2 v_t^2 \quad (24)$$

integrallerdir. Bir $f(E, L)$ dağılımı (22)'yi otomatik olarak sağlar. Jeans denklemleri f 'nin yalnızca düşük mertebeden momentlerini kullanır; dolayısıyla tam bir dağılım fonksiyonu modelinden daha az bilgilendiricidirler, fakat verilere uygulanmaları çok daha kolaydır.

4. Hız Momentleri ve Jeans Denklemleri

4.1. Sıfırıncı moment: süreklilik denklemi

(19)'i tüm hızlar üzerinden integre edelim:

$$\int \left[\frac{\partial f}{\partial t} + v_i \frac{\partial f}{\partial x_i} - \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial v_i} \right] d^3v = 0. \quad (25)$$

İlk terim

$$\int \frac{\partial f}{\partial t} d^3v = \frac{\partial v}{\partial t}. \quad (26)$$

olur. İkinci terim

$$\int v_i \frac{\partial f}{\partial x_i} d^3v = \frac{\partial}{\partial x_i} \int v_i f d^3v = \frac{\partial (v \bar{v}_i)}{\partial x_i}. \quad (27)$$

olur. Kuvvet terimi, $|v| \rightarrow \infty$ iken $f \rightarrow 0$ yeterince hızlıysa yok olur:

$$-\frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \int \frac{\partial f}{\partial v_i} d^3v = 0. \quad (28)$$

Dolayısıyla

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial (v \bar{v}_i)}{\partial x_i} = 0. \quad (29)$$

Vektör gösteriminde,

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \nabla \cdot (v \bar{\mathbf{v}}) = 0. \quad (30)$$

Bu, olağan sayı korunumudur. Kütleçekim yıldızları hız uzayında hareket ettirir fakat onları yaratıp yok etmez; bu nedenle açıkça kütleçekim kuvveti içermez.

4.2. Birinci moment: Kartezyen Jeans denklemi

(19)'i v_j ile çarpıp integre edelim:

$$\int v_j \left[\frac{\partial f}{\partial t} + v_i \frac{\partial f}{\partial x_i} - \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial v_i} \right] d^3v = 0. \quad (31)$$

Zaman terimi

$$\int v_j \frac{\partial f}{\partial t} d^3v = \frac{\partial (v \bar{v}_j)}{\partial t}. \quad (32)$$

verir. Akış terimi

$$\int v_j v_i \frac{\partial f}{\partial x_i} d^3v = \frac{\partial (v \langle v_i v_j \rangle)}{\partial x_i}. \quad (33)$$

verir. Kuvvet terimi için kısmi integrasyon yapılır:

$$\begin{aligned} -\frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \int v_j \frac{\partial f}{\partial v_i} d^3v &= -\frac{\partial \Phi}{\partial x_i} [v_j f]_{\infty} \\ &\quad + \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \int f \frac{\partial v_j}{\partial v_i} d^3v \\ &= v \frac{\partial \Phi}{\partial x_j}. \end{aligned} \quad (34)$$

Böylece

$$\frac{\partial (v \bar{v}_j)}{\partial t} + \frac{\partial (v \langle v_i v_j \rangle)}{\partial x_i} + v \frac{\partial \Phi}{\partial x_j} = 0. \quad (35)$$

$$\langle v_i v_j \rangle = \sigma_{ij}^2 + \bar{v}_i \bar{v}_j, \quad (36)$$

kullanılarak ve süreklilik denklemi $\bar{v}_j$ ile çarpılmış hâliyle çıkarılarak Euler-benzeri biçim elde edilir:

$$v \left(\frac{\partial \bar{v}_j}{\partial t} + \bar{v}_i \frac{\partial \bar{v}_j}{\partial x_i} \right) = -v \frac{\partial \Phi}{\partial x_j} - \frac{\partial (v \sigma_{ij}^2)}{\partial x_i}. \quad (37)$$

Denklem (37) Jeans denklemdir. Euler denklemine benzer, ancak basıncın yerini yıldız yörünge dağılımı tarafından belirlenen bir gerilme tensörü alır. Daha yüksek momentler belirtilmediğinden, Jeans hiyerarşisi anizotropi veya dağılım fonksiyonları hakkında varsayımlar olmaksızın kapalı değildir.

5. Küresel Jeans Denklemleri

5.1. Anizotropi ile türetim

Durağan, dönmeyen, küresel simetrik bir izleyici popülasyonu için $\bar{v}_r = \bar{v}_\theta = \bar{v}_\phi = 0$ ve tüm nicelikler yalnızca r 'ye bağlıdır. Radyal Jeans denklemi

$$\frac{d(v\sigma_r^2)}{dr} + \frac{v}{r} (2\sigma_r^2 - \sigma_\theta^2 - \sigma_\phi^2) = -v \frac{d\Phi}{dr}. \quad (38)$$

şeklindedir. Küresel simetri

$$\sigma_\theta^2 = \sigma_\phi^2. \quad (39)$$

gerektirir. Binney anizotropi parametresini

$$\beta(r) = 1 - \frac{\sigma_\theta^2 + \sigma_\phi^2}{2\sigma_r^2} = 1 - \frac{\sigma_\theta^2}{\sigma_r^2}, \quad (40)$$

olarak tanımlayalım; burada $\sigma_\theta^2 = \sigma_\phi^2 = \sigma_\phi^2$. (38)'ye yerine koymak

$$\frac{d(v\sigma_r^2)}{dr} + \frac{2\beta v\sigma_r^2}{r} = -v \frac{GM(r)}{r^2}. \quad (41)$$

verir. Kütle için çözümlerse,

$$M(r) = -\frac{r^2}{Gv} \left[\frac{d(v\sigma_r^2)}{dr} + \frac{2\beta v\sigma_r^2}{r} \right]. \quad (42)$$

Eşdeğer olarak,

$$M(r) = -\frac{r\sigma_r^2}{G} \left[\frac{d \ln v}{d \ln r} + \frac{d \ln \sigma_r^2}{d \ln r} + 2\beta \right]. \quad (43)$$

Fiziksel yorum açıktır. Kütleçekim içeri doğru çeker. Bu, radyal basıncın gradyanı $d(v\sigma_r^2)/dr$ ve anizotropi tarafından yönetilen bir eğrilik terimi ile dengelenir. Eğer $\beta > 0$ ise, yörüngeler radyal yanlıdır ve daha az teğetsel basınç kullanılabilir; sabit bir gözlenen dispersiyon için çıkarılan kütle değişir.

Belirli $M(r)$ ve $\beta(r)$ için (41) birinci mertebeden doğrusal bir denklemdir. İntegrasyon çarpanı

$$I(r) = \exp \left[\int_r^r \frac{2\beta(s)}{s} ds \right], \quad (44)$$

ile, sonsuzda $v\sigma_r^2 \rightarrow 0$ sağlayan çözüm

$$v(r)\sigma_r^2(r) = \frac{1}{I(r)} \int_r^\infty I(s)v(s) \frac{GM(s)}{s^2} ds. \quad (45)$$

olur. Sabit β için,

$$I(r) = r^{2\beta}, \quad (46)$$

ve dolayısıyla

$$v\sigma_r^2 = r^{-2\beta} \int_r^\infty s^{2\beta} v(s) \frac{GM(s)}{s^2} ds. \quad (47)$$

Not 1. Gözlenen bakış-doğrultusu dispersiyonu izdüşürülmüş bir niceliktir. R izdüşürülmüş yarıçap ve $r^2 = R^2 + z^2$ ise,

$$\Sigma(R) = 2 \int_R^\infty \frac{v(r)r dr}{\sqrt{r^2 - R^2}}, \quad (48)$$

ve

$$\Sigma\sigma_{\text{los}}^2 = 2 \int_R^\infty \left(1 - \beta \frac{R^2}{r^2} \right) \frac{v\sigma_r^2 r dr}{\sqrt{r^2 - R^2}}. \quad (49)$$

Denklemler (41) ve (49) kütle-anizotropi dejeneresini gösterir: farklı $M(r)$ ve $\beta(r)$ çiftleri benzer izdüşürülmüş dispersiyonlar üretebilir.

5.2. Cüce küresel galaksilere uygulama

Cüce küresel galaksiler küçük baryonik kütlelere, az gaz ve ısıtıcılıklarına göre büyük yıldız hız dispersiyonlarına sahiptir. Üç boyutlu yarı-ışık yarıçapı $r_{1/2}$ yakınında küresel Jeans denkleminde kullanışlı bir kütle kestiricisi elde edilir. Şu koşulun sağlandığı yarıçapta

$$\frac{d \ln v}{d \ln r} \simeq -3, \quad (50)$$

çevrelenen kütle β 'ya zayıf duyarlıdır [11]. Kestirici

$$M(r_{1/2}) \simeq \frac{3r_{1/2} \langle \sigma_{\text{los}}^2 \rangle}{G}. \quad (51)$$

şeklindedir. Birçok ışık profili için $r_{1/2} \simeq (4/3)R_e$ olduğundan,

$$M(r_{1/2}) \simeq \frac{4R_e \langle \sigma_{\text{los}}^2 \rangle}{G}. \quad (52)$$

$R_e = 300 \text{ pc}$ ve $\sigma_{\text{los}} = 10 \text{ km s}^{-1}$ olan tipik bir klasik cüce için,

$$G = 4.302 \times 10^{-3} \frac{\text{pc} (\text{km s}^{-1})^2}{M_\odot}, \quad (53)$$

kullanılarak

$$\begin{aligned} M(r_{1/2}) &= \frac{4(300 \text{ pc})(100 \text{ km}^2 \text{ s}^{-2})}{4.302 \times 10^{-3}} M_\odot \\ &= 2.79 \times 10^7 M_\odot. \end{aligned} \quad (54)$$

elde ederiz. ısıtıcılık $L = 5 \times 10^5 L_\odot$ ise,

$$\frac{M}{L} \simeq 56 \frac{M_\odot}{L_\odot}. \quad (55)$$

Yüksek kütle-ışık oranı ince bir modelleme artefaktı değildir; virial ölçek $r\sigma^2/G$ 'den kaynaklanır.

6. Eksenel Simetrik Jeans Denklemleri ve Asimetrik Sürüklenme

6.1. Silindirik radyal Jeans denklemi

Silindirik koordinatlarda (R, ϕ, z) , $\partial/\partial t = 0$ ve $\partial/\partial \phi = 0$ olan durağan eksenel simetrik bir disk için radyal Jeans denklemi

$$\frac{\partial(v\sigma_R^2)}{\partial R} + \frac{\partial(v\sigma_{Rz}^2)}{\partial z} + v \left(\frac{\sigma_R^2 - \bar{v}_\phi^2}{R} + \frac{\partial\Phi}{\partial R} \right) = 0. \quad (56)$$

şeklindedir. Dairesel hız

$$v_c^2(R, z) = R \frac{\partial\Phi}{\partial R}. \quad (57)$$

olur.

$$\overline{v_\phi^2} = \bar{v}_\phi^2 + \sigma_\phi^2, \quad (58)$$

yazılıp (56) yeniden düzenlenirse,

$$v_c^2 - \bar{v}_\phi^2 = \sigma_\phi^2 - \sigma_R^2 - \frac{R}{v} \frac{\partial(v\sigma_R^2)}{\partial R} - \frac{R}{v} \frac{\partial(v\sigma_{Rz}^2)}{\partial z}. \quad (59)$$

bulunur. Orta düzlem yakınında eğim terimi çoğu zaman ilk yaklaşım olarak ihmal edilir. O hâlde

$$v_c^2 - \bar{v}_\phi^2 = \sigma_R^2 \left[-\frac{d \ln(v\sigma_R^2)}{d \ln R} - 1 + \frac{\sigma_\phi^2}{\sigma_R^2} \right]. \quad (60)$$

Bu fark asimetric sürüklenmedir: rastgele radyal hareketler ortalama azimutal akışı dairesel hızın altına indirir.

$v_a = v_c - \bar{v}_\phi \ll v_c$ olan sıcak bir popülasyon için,

$$v_c^2 - \bar{v}_\phi^2 = (v_c - \bar{v}_\phi)(v_c + \bar{v}_\phi) \simeq 2v_c v_a, \quad (61)$$

dolayısıyla

$$v_a \simeq \frac{\sigma_R^2}{2v_c} \left[-\frac{d \ln(v\sigma_R^2)}{d \ln R} - 1 + \frac{\sigma_\phi^2}{\sigma_R^2} \right]. \quad (62)$$

Üstel bir izleyici yoğunluğu ve dispersiyon profili için,

$$v(R) = v_0 e^{-R/R_d}, \quad \sigma_R^2(R) = \sigma_{R0}^2 e^{-R/R_\sigma}, \quad (63)$$

logaritmik türev

$$-\frac{d \ln(v\sigma_R^2)}{d \ln R} = \frac{R}{R_d} + \frac{R}{R_\sigma}. \quad (64)$$

olur. Eğer $R = 8 \text{ kpc}$, $R_d = 3 \text{ kpc}$, $R_\sigma = 7 \text{ kpc}$, $\sigma_R = 40 \text{ km s}^{-1}$, $v_c = 230 \text{ km s}^{-1}$ ve $\sigma_\phi^2/\sigma_R^2 = 0.5$ ise,

$$v_a = \frac{1600}{460} \left[\frac{8}{3} + \frac{8}{7} - 1 + 0.5 \right] \text{ km s}^{-1} = 11.5 \text{ km s}^{-1}. \quad (65)$$

Sonuç, yaşlı ince-disk yıldızlarının gözlenen gecikmesiyle aynı mertebededir.

6.2. Düşey Jeans denklemleri ve yerel yoğunluk

Durağan eksenel simetrik bir disk için düşey Jeans denklemleri

$$\frac{1}{R} \frac{\partial(Rv\sigma_{Rz}^2)}{\partial R} + \frac{\partial(v\sigma_z^2)}{\partial z} + v \frac{\partial\Phi}{\partial z} = 0. \quad (66)$$

şeklinde. Eğim terimi güneş silindiri yakınında küçükse,

$$\frac{\partial(v\sigma_z^2)}{\partial z} = -vK_z, \quad K_z = \frac{\partial\Phi}{\partial z}. \quad (67)$$

Böylece düşey kuvvet

$$K_z(z) = -\frac{1}{v} \frac{\partial(v\sigma_z^2)}{\partial z}. \quad (68)$$

olur. Bunu silindirik koordinatlarda Poisson denklemleriyle birleştirmek

$$4\pi G\rho = \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left(R \frac{\partial\Phi}{\partial R} \right) + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}. \quad (69)$$

verir.

$$R \frac{\partial\Phi}{\partial R} = v_c^2(R), \quad (70)$$

olduğundan yerel yoğunluk

$$4\pi G\rho(R, z) = \frac{1}{R} \frac{\partial v_c^2}{\partial R} + \frac{\partial K_z}{\partial z}. \quad (71)$$

şeklinde. Yerel olarak düz bir dönme eğrisi için radyal terim küçüktür:

$$\frac{1}{R} \frac{\partial v_c^2}{\partial R} \simeq 0. \quad (72)$$

Bu durumda Oort-sınırı ölçümü esasen $\partial K_z/\partial z$ ölçümüdür.

Standart bir yerel karanlık madde yoğunluğu

$$\rho_{\text{dm},\odot} \simeq 0.01 M_\odot \text{ pc}^{-3}, \quad (73)$$

olup

$$\rho_{\text{dm},\odot} \simeq 0.38 \text{ GeV cm}^{-3}. \quad (74)$$

değerine eşdeğerdir. Dönüşüm

$$1 M_\odot \text{ pc}^{-3} = 37.9 \text{ GeV cm}^{-3}. \quad (75)$$

ifadesinden gelir. Yerel yoğunluk, doğrudan algılama deneylerini kalibre ettiği ve Samanyolu kütle modellerini sabitlediği için dinamik açıdan önemlidir [12].

7. Dönme Eğrileri ve Temel Kütle Modelleri

7.1. Noktasal kütle ve ışıklı sonlu sistemler

Noktasal bir M kütlesi için,

$$\Phi(r) = -\frac{GM}{r}, \quad (76)$$

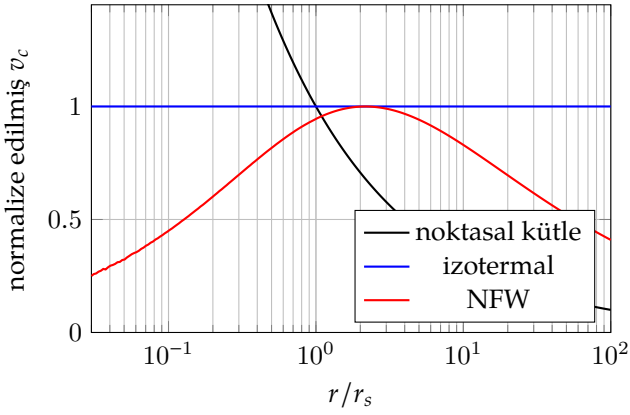
ve

$$v_c(r) = \sqrt{\frac{GM}{r}} \propto r^{-1/2}. \quad (77)$$

Herhangi bir sonlu kütle dağılımı, uzanımından çok daha büyük yarıçaplarda benzer davranır:

$$M(r) \rightarrow M_{\text{tot}} \Rightarrow v_c(r) \rightarrow \sqrt{\frac{GM_{\text{tot}}}{r}}. \quad (78)$$

Bu nedenle uzanmış düz bir dönme eğrisi, çevrelenen kütlenin yarıçapla yaklaşık doğrusal olarak büyümeye devam ettiğini gösterir.



Şekil 2. Temsili dönme eğrileri. Noktasal kütle $r^{-1/2}$ olarak azalır, izotermal küre düzdür ve bir NFW halosunda eğri yükselebilir, tepe yapar ve yavaşça azalır.

7.2. Üstel disk

İnce bir yıldız diski çoğu zaman

$$\Sigma(R) = \Sigma_0 e^{-R/R_d}, \quad (79)$$

ile yaklaşık olarak betimlenir; toplam kütle

$$M_d = 2\pi\Sigma_0 R_d^2. \quad (80)$$

olur. Tam dairesel hız ifadesi değiştirilmiş Bessel fonksiyonlarını içerir; nitel olarak v_c merkez yakınında yükselebilir,

$$R \simeq 2.2R_d, \quad (81)$$

civarında tepe yapar ve ardından disk kütesinin çoğu çevrelendiğinde yaklaşık Kepler tipi azalır. Dolayısıyla bir disk tek başına, kütle-ışık oranı yarıçapla güçlü biçimde artmadıkça, sonsuza dek düz bir eğri sürdüremez.

7.3. İzotermal küre

Tekil izotermal kürenin yoğunluğu

$$\rho(r) = \frac{\sigma^2}{2\pi G r^2}. \quad (82)$$

şeklinde. Çevrelenen kütle

$$\begin{aligned} M(r) &= 4\pi \int_0^r \frac{\sigma^2}{2\pi G s^2} s^2 ds \\ &= \frac{2\sigma^2 r}{G}. \end{aligned} \quad (83)$$

olur. Dairesel hız bu nedenle

$$v_c^2 = \frac{GM(r)}{r} = 2\sigma^2, \quad (84)$$

olup tam olarak düzdür. Tekil izotermal küre gözlenen düzlüğü yakalar, fakat iki kusuru vardır: $r = 0$ 'da tekildir ve sonsuz toplam kütleyle sahiptir.

8. NFW Halosu

8.1. Yoğunluk, kütle ve eğimler

$$x = \frac{r}{r_s}. \quad (85)$$

olsun. NFW yoğunluk profili

$$\rho(r) = \frac{\rho_s}{x(1+x)^2}. \quad (86)$$

şeklinde. Logaritmik eğimi

$$\begin{aligned} \frac{d \ln \rho}{d \ln r} &= \frac{d}{d \ln x} [-\ln x - 2 \ln(1+x)] \\ &= -1 - \frac{2x}{1+x}. \end{aligned} \quad (87)$$

Böylece

$$\frac{d \ln \rho}{d \ln r} \rightarrow -1 \quad (x \ll 1), \quad (88)$$

ve

$$\frac{d \ln \rho}{d \ln r} \rightarrow -3 \quad (x \gg 1). \quad (89)$$

Kütle şu ifadeden elde edilir:

$$\begin{aligned} M(r) &= 4\pi\rho_s r_s^3 \int_0^x \frac{y^2 dy}{y(1+y)^2} \\ &= 4\pi\rho_s r_s^3 \int_0^x \frac{y dy}{(1+y)^2}. \end{aligned} \quad (90)$$

Şöyle yazalım:

$$\frac{y}{(1+y)^2} = \frac{1}{1+y} - \frac{1}{(1+y)^2}. \quad (91)$$

Dolayısıyla

$$\begin{aligned} \int_0^x \frac{y dy}{(1+y)^2} &= \left[\ln(1+y) + \frac{1}{1+y} \right]_0^x \\ &= \ln(1+x) - \frac{x}{1+x}. \end{aligned} \quad (92)$$

Böylece

$$M(r) = 4\pi\rho_s r_s^3 \left[\ln(1+x) - \frac{x}{1+x} \right]. \quad (93)$$

Kütle $r \rightarrow \infty$ iken logaritmik olarak ıraksar; bu nedenle profil bir virial yarıçap içinde kesilmeli veya yorumlanmalıdır.

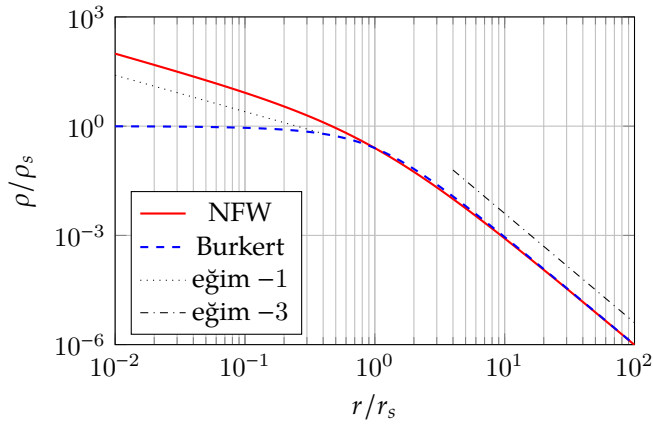
8.2. Potansiyel

$\Phi(\infty) = 0$ olan küresel bir kütle dağılımı için,

$$\Phi(r) = -G \int_r^\infty \frac{M(s)}{s^2} ds. \quad (94)$$

(93) ifadesini $u = s/r_s$ ile yerine koyarsak:

$$\Phi(r) = -4\pi G \rho_s r_s^2 \int_x^\infty \frac{\ln(1+u) - u/(1+u)}{u^2} du. \quad (95)$$



Şekil 3. NFW ve Burkert yoğunluk profilleri. NFW halosunda tepe yapı bulunur, $\rho \propto r^{-1}$, oysa Burkert halosunun sonlu bir merkezî yoğunluğu vardır. Her ikisi de büyük yarıçaplarda yaklaşık r^{-3} olarak düşer.

$$\frac{d}{du} \left[\frac{\ln(1+u)}{u} \right] = \frac{u/(1+u) - \ln(1+u)}{u^2}, \quad (96)$$

olduğundan integral

$$\int_x^\infty \frac{\ln(1+u) - u/(1+u)}{u^2} du = \frac{\ln(1+x)}{x}. \quad (97)$$

şeklinde. Böylece

$$\Phi(r) = -4\pi G \rho_s r_s^2 \frac{\ln(1+x)}{x}. \quad (98)$$

Eşdeğer olarak,

$$\Phi(r) = -4\pi G \rho_s r_s^3 \frac{\ln(1+r/r_s)}{r}. \quad (99)$$

Yoğunluk $1/r$ olarak ıraksasa da potansiyel merkezde sonludur:

$$\Phi(0) = -4\pi G \rho_s r_s^2. \quad (100)$$

8.3. Dairesel hız ve maksimum hız

(11) ve (93) kullanılarak,

$$v_c^2(r) = 4\pi G \rho_s r_s^2 \frac{\ln(1+x) - x/(1+x)}{x}. \quad (101)$$

Tanımlayalım:

$$V_s^2 = 4\pi G \rho_s r_s^2. \quad (102)$$

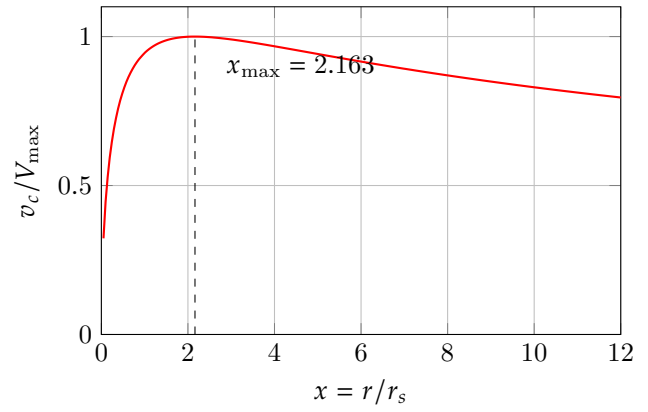
O hâlde

$$\frac{v_c^2}{V_s^2} = \frac{m(x)}{x}, \quad m(x) = \ln(1+x) - \frac{x}{1+x}. \quad (103)$$

Maksimum şu koşulda gerçekleşir:

$$\frac{d}{dx} \left[\frac{m(x)}{x} \right] = 0. \quad (104)$$

$$m'(x) = \frac{x}{(1+x)^2}, \quad (105)$$



Şekil 4. Maksimumuna göre normalize edilmiş NFW dairesel hız eğrisi. Tepe $r = 2.163r_s$ konumunda gerçekleşir.

olduğundan koşul

$$xm'(x) - m(x) = 0, \quad (106)$$

ya da

$$\frac{x^2}{(1+x)^2} - \ln(1+x) + \frac{x}{1+x} = 0. \quad (107)$$

hâline gelir. Sayısal olarak,

$$x_{\max} = 2.16258. \quad (108)$$

Bu yarıçapta,

$$V_{\max}^2 = V_s^2 \frac{m(2.16258)}{2.16258}. \quad (109)$$

NFW eğrisi tepenin ötesinde yalnızca logaritmik olarak yavaş azalır; çünkü büyük yarıçapta $M(r) \propto \ln r$ olur.

8.4. Virial kütle, konsantrasyon ve karakteristik yoğunluk

r_{200} , ortalama yoğunluğu kritik yoğunluğun 200 katı olan yarıçap olarak tanımlansın,

$$\bar{\rho}(< r_{200}) = 200 \rho_{\text{crit}}. \quad (110)$$

Kritik yoğunluk

$$\rho_{\text{crit}} = \frac{3H^2}{8\pi G}. \quad (111)$$

şeklinde. Virial kütle

$$M_{200} = \frac{4\pi}{3} 200 \rho_{\text{crit}} r_{200}^3. \quad (112)$$

olur. Konsantrasyon

$$c = \frac{r_{200}}{r_s}. \quad (113)$$

ile tanımlanır. NFW kütlelerinin r_{200} 'de değerlendirilmesi

$$M_{200} = 4\pi \rho_s r_s^3 \left[\ln(1+c) - \frac{c}{1+c} \right]. \quad (114)$$

verir. (112) ve (114) eşitlenirse

$$\rho_s = \frac{200}{3} \rho_{\text{crit}} \frac{c^3}{\ln(1+c) - c/(1+c)}. \quad (115)$$

elde edilir. Yaygın olarak

$$\delta_c = \frac{\rho_s}{\rho_{\text{crit}}} = \frac{200}{3} \frac{c^3}{\ln(1+c) - c/(1+c)}. \quad (116)$$

tanımlanır. Virial dairesel hız

$$V_{200}^2 = \frac{GM_{200}}{r_{200}}, \quad (117)$$

olup NFW dönme eğrisi

$$\frac{v_c^2(r)}{V_{200}^2} = \frac{c}{x} \frac{\ln(1+x) - x/(1+x)}{\ln(1+c) - c/(1+c)}. \quad (118)$$

şeklinde yazılabilir.

9. Çalışılmış Sayısal Uygulamalar

9.1. Samanyolu benzeri bir NFW halası

Alalım:

$$M_{200} = 10^{12} M_{\odot}, \quad c = 10, \quad H_0 = 70 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}. \quad (119)$$

Bu H_0 değeri için,

$$\rho_{\text{crit}} \approx 136 M_{\odot} \text{ kpc}^{-3}. \quad (120)$$

(112)'den,

$$r_{200} = \left[\frac{3M_{200}}{4\pi 200\rho_{\text{crit}}} \right]^{1/3} = 206 \text{ kpc}. \quad (121)$$

Sonra

$$r_s = \frac{r_{200}}{c} = 20.6 \text{ kpc}. \quad (122)$$

$c = 10$ için,

$$m(c) = \ln(11) - \frac{10}{11} = 1.489. \quad (123)$$

Dolayısıyla

$$\begin{aligned} \rho_s &= \frac{M_{200}}{4\pi r_s^3 m(c)} \\ &= 6.11 \times 10^6 M_{\odot} \text{ kpc}^{-3} \\ &= 6.11 \times 10^{-3} M_{\odot} \text{ pc}^{-3}. \end{aligned} \quad (124)$$

Güneş yarıçapında $R_0 = 8.2 \text{ kpc}$,

$$x_0 = \frac{8.2}{20.6} = 0.398. \quad (125)$$

Halo yoğunluğu

$$\begin{aligned} \rho_h(R_0) &= \frac{6.11 \times 10^{-3}}{0.398(1.398)^2} M_{\odot} \text{ pc}^{-3} \\ &= 7.86 \times 10^{-3} M_{\odot} \text{ pc}^{-3}. \end{aligned} \quad (126)$$

olur. Bu, (73)'deki kanonik yerel karanlık madde yoğunluğuna yakındır; yalnızca halo ve tam Galaktik modelleme arasındaki fark onlarca yüzde düzeyindedir.

Virial hız

$$V_{200} = \sqrt{\frac{GM_{200}}{r_{200}}} = 144 \text{ km s}^{-1}, \quad (127)$$

olup burada $G = 4.302 \times 10^{-6} \text{ kpc}(\text{km s}^{-1})^2 M_{\odot}^{-1}$ kullanılmıştır. Maksimum hız (118)'den $x = 2.163$ konumunda elde edilir:

$$V_{\text{max}} = V_{200} \left[\frac{c}{2.163} \frac{m(2.163)}{m(10)} \right]^{1/2} = 174 \text{ km s}^{-1}. \quad (128)$$

9.2. Bir cüce küresel galaksinin kütle-ışık oranı

$R_e = 50 \text{ pc}$ ve $\sigma_{\text{los}} = 4 \text{ km s}^{-1}$ olan ultra-sönük bir cüce için,

$$\begin{aligned} M(r_{1/2}) &= \frac{4R_e \sigma_{\text{los}}^2}{G} \\ &= \frac{4(50)(16)}{4.302 \times 10^{-3}} M_{\odot} \\ &= 7.44 \times 10^5 M_{\odot}. \end{aligned} \quad (129)$$

Eğer $L = 3000 L_{\odot}$ ise,

$$M/L \approx 248 M_{\odot}/L_{\odot}. \quad (130)$$

Bu, cüce küresel galaksilerin bilinen en karanlık madde baskın yıldız sistemleri arasında neden yer aldığını gösterir.

9.3. Düşey kinematikten yüzey yoğunluğu

İnce levha yaklaşımında, z yüksekliğindeki düşey kuvvet yüzey yoğunluğu ile

$$K_z(z) \approx 2\pi G \Sigma(|z|). \quad (131)$$

ilişkilidir. Kinematik $\Sigma(1.1 \text{ kpc}) \approx 70 M_{\odot} \text{ pc}^{-2}$ veriyor ve görünür madde $55 M_{\odot} \text{ pc}^{-2}$ katkı yapıyorsa, karanlık katkı

$$\Sigma_{\text{dm}} \approx 15 M_{\odot} \text{ pc}^{-2}. \quad (132)$$

olur. Bunu $|z| < 1.1 \text{ kpc}$ boyunca yaklaşık sabit bir yoğunluk olarak yaklaştırmak

$$\rho_{\text{dm}} \approx \frac{\Sigma_{\text{dm}}}{2(1100 \text{ pc})} = 6.8 \times 10^{-3} M_{\odot} \text{ pc}^{-3}, \quad (133)$$

verir; bu da yine $0.01 M_{\odot} \text{ pc}^{-3}$ mertebesinde dir.

10. Çekirdekler, Tepeler ve Alternatif Halo Profilleri

Burkert profili yaygın kullanılan çekirdekli bir alternatiftir:

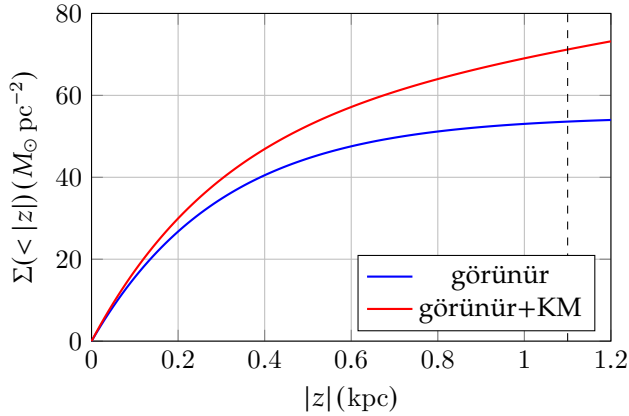
$$\rho_B(r) = \frac{\rho_0}{(1+r/r_0)[1+(r/r_0)^2]}. \quad (134)$$

Küçük yarıçaplarda,

$$\rho_B(r) \rightarrow \rho_0, \quad (135)$$

Tablo 1. Karakteristik NFW nicelikleri.

Nicelik	Tanım	Anlam
r_s	eğim yarıçapı	$d \ln \rho / d \ln r = -2$
ρ_s	ölçek yoğunluğu	normalizasyon
x	r/r_s	boyutsuz yarıçap
$m(x)$	$\ln(1+x) - x/(1+x)$	boyutsuz kütle
c	r_{200}/r_s	konsantrasyon
M_{200}	$(4\pi/3)200\rho_{\text{crit}}r_{200}^3$	virial kütle
δ_c	$\rho_s/\rho_{\text{crit}}$	karakteristik aşırı yoğunluk
V_{max}	$v_c(2.163r_s)$	tepe halo hızı

**Şekil 5.** Güneş yarıçapı yakınında açıklayıcı düşey yüzey yoğunluğu bütçesi. Neredeyse sabit bir karanlık madde yoğunluğu, yükseklikle yaklaşık doğrusal büyüyen bir bileşen ekler.

oysa NFW profilinde $\rho \propto r^{-1}$ olur. Burkert profili için iç çevrelenen kütle

$$M_B(r) \propto r^3 \quad (r \ll r_0), \quad (136)$$

olarak ölçeklenir ve dolayısıyla

$$v_c(r) \propto r. \quad (137)$$

NFW tepe yapısı için,

$$M_{\text{NFW}}(r) \propto r^2 \quad (r \ll r_s), \quad (138)$$

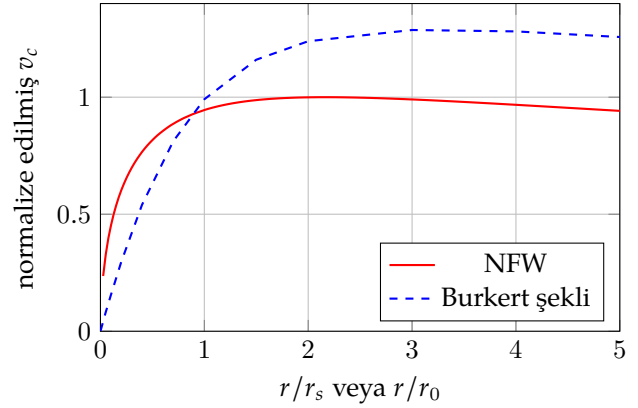
bu nedenle

$$v_c(r) \propto r^{1/2}. \quad (139)$$

Katı-cisim tipi yükseliş ile karekök tipi yükseliş arasındaki fark, bir çekirdek ile tepe yapısı arasındaki kinematik imzadır; ancak gözlemsel demet yayılması, dairesel olmayan hareketler, baryonik geri besleme ve eğim belirsizlikleri bunu örtebilir.

11. Tartışma

Jeans denklemleri güçlüdür çünkü yalnızca düşük meriteden hız momentleri gerektirir; ancak bu tutumluluk aynı zamanda temel zayıflıklarıdır. Bir Jeans çözümü negatif olmayan bir dağılım fonksiyonuna karşılık gelmek zorunda değildir. Karşılık gelse bile, izdüşürülmüş gözlenebilirler $M(r)$, $\beta(r)$ ve izleyici yoğunluğunu

**Şekil 6.** Tepeli ve çekirdekli profiller için iç dairesel hız şekilleri. Burkert eğrisi küçük yarıçapta daha çok doğrusal yükselirken, NFW eğrisi $r^{1/2}$ olarak yükselir.

tekil olarak belirlemeyebilir. Küresel kütle–anizotropi dejeneresi klasik örnektir: radyal anizotropi kütle profilindeki bir değişimi taklit edebilir. Özdevinimler, daha yüksek hız momentleri, birden çok izleyici popülasyonu ve dağılım fonksiyonu modellemesi bu dejenerenin kırılmasına yardımcı olur.

Dönme eğrileri daha doğrudandır, fakat varsayimsız değildir. Gaz dönmesi basınç gradyanları, türbülans, bükülmeler, çubuklar, sarmal akış ve diskin sonlu kalınlığından etkilenir. Yıldız dönmesi asimetrik sürüklenme düzeltmeleri gerektirir. Şişkinlik, disk, gaz ve halo bileşenlerine ayrıştırma yıldız kütle–ışık oranı ile sınırlıdır. Buna karşın Rubin ve Bosma tarafından bulunan ampirik düzlük, karanlık madde için en açık dinamik argümanlardan biri olmaya devam eder: ışıklı diskin ötesinde $v_c \simeq$ sabit olması $M(r) \propto r$ anlamına gelir ve bu görünür kütleyi çok aşar.

NFW profili soğuk karanlık madde paradigmasının temel taşlarından biridir. İki parametresi M_{200} ve c ile değiştirilebilir ve böylece galaksi dinamiği kozmolojiye bağlanır. Hiyerarşik yapı oluşumunda konsantrasyon, halonun toplandığı dönemde Evren'in karakteristik yoğunluğunu yansıtır: düşük kütleli halolar tipik olarak daha erken oluşur ve daha konsantredir. Hassas kozmoloji ρ_{crit} 'e giren arka plan parametrelerini sabitler [13], simülasyonlar ise kütle–konsantrasyon ilişkisini kalibre eder.

Bununla birlikte NFW biçimi evrensel olarak yeter-

li değildir. Tepe-çekirdek problemi, bazı karanlık madde baskın galaksilerin neden merkezî çekirdeklere sahip görüldüğünü sorar. Olası açıklamalar arasında tek-rarlanan gaz içeri akışı ve dışarı akışı yoluyla karanlık maddeye enerji aktaran baryonik geri besleme, kendiy-le etkileşen karanlık madde, bulanık veya sıcak karanlık madde ve sistematik gözlemsel etkiler yer alır. Buna karşılık bazı sistemler tepelerle tutarlıdır. Dolayısıyla problem yalnızca NFW'nin yanlış olup olmadığı değil, çarpışmasız soğuk karanlık madde artı baryonik fiziğin ondan sapmaları hangi koşullarda öngördüğüdür.

Yerel karanlık madde yoğunluğu başka bir modern sınırı gösterir. Gaia astrometrisi, milyonlarca yıldız için faz-uzay bilgisi sağlayarak düşey Jeans analizlerini dönüştürmüştür. Ancak sarmal kollardan, Galaktik çubuktan, uydu pertürbasyonlarından ve faz-uzay sarmallarından kaynaklanan dengesizlikler en basit durağan-durum varsayımlarını ihlal eder. Yerel değer $\rho_{\text{dm},\odot} \sim 0.01 M_{\odot} \text{pc}^{-3}$ merteye düzeyinde sağlamdır, fakat yüzde düzeyinde hassasiyet denge-dışı modelleme gerektirir.

12. Sonuç

Faz-uzayı sayı korunumundan başlayarak çarpışmasız Boltzmann denklemini ve hız momentlerini türettik. Sıfırıncı moment izleyici sürekliliğini verirken, birinci moment kütleçekimin hız dispersiyonu gradyanları ve akış hareketiyle dengelendiği Jeans denklemlerini verir. Küresel sistemlerde Jeans denklemi çevrelenen kütle-yi izleyici yoğunluğu, radyal dispersiyon ve anizotropi ile ilişkilendirir; disklerde radyal denklem asimetrik sürüklenmeyi, düşey denklem ise düşey kuvvet üzerinden yerel yoğunluğu verir.

Dönme eğrileri bu dinamik ilkeleri karanlık madde için en güçlü argümanlardan birine dönüştürür. Noktasal kütle $v_c \propto r^{-1/2}$ verir, üstel disk tepe yapıp azalır; oysa gözlenen sarmal galaksiler yaygın biçimde neredeyse düz eğriler gösterir. İzotermal küre düzlüğü açıklar, fakat tekildir ve sonsuz kütleyle sahiptir. Kozmolojik simülasyonlarla güdülenen NFW profili, -1 ve -3 yoğunluk eğimleri, çevrelenen kütle $M(r) = 4\pi\rho_s r_s^3 [\ln(1+x) - x/(1+x)]$, potansiyel $\Phi = -4\pi G\rho_s r_s^3 \ln(1+r/r_s)/r$ ve $r = 2.163r_s$ konumunda bir dairesel hız maksimumu olan fiziksel olarak bağlantılı bir halo modeli sağlar.

Jeans yöntemleri ve NFW haloları vazgeçilmez olma-ya devam etmektedir, fakat nihai yanıtlar değildir. Varsayımları denge-dışı yapı, baryonik etkiler ve yüksek kaliteli veriler karşısında sınanmalıdır. Kuram, simülasyonlar ve gözlemler arasındaki süregelen diyalog, galaktik dinamiği modern astrofiziğin merkezi bir disiplinini yapan şeydir.

Kaynaklar

[1] J. H. Jeans, "On the theory of star-streaming and the structure of the universe," *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, cilt 76, ss. 70–84, 1915.

[2] A. S. Eddington, "The distribution of stars in globular clusters," *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, cilt 76, ss. 572–585, 1916.

[3] S. Chandrasekhar, *Principles of Stellar Dynamics*. University of Chicago Press, 1942.

[4] J. Binney and S. Tremaine, *Galactic Dynamics*, 2. baskı. Princeton University Press, 2008.

[5] B. W. Carroll and D. A. Ostlie, *An Introduction to Modern Astrophysics*, 2. baskı. Cambridge University Press, 2017.

[6] V. C. Rubin, W. K. Ford Jr., and N. Thonnard, "Rotational properties of 21 Sc galaxies with a large range of luminosities and radii," *Astrophysical Journal*, cilt 238, ss. 471–487, 1980.

[7] A. Bosma, "21-cm line studies of spiral galaxies. II. The distribution and kinematics of neutral hydrogen in spiral galaxies of various morphological types," *Astronomical Journal*, cilt 86, ss. 1825–1846, 1981.

[8] J. F. Navarro, C. S. Frenk, and S. D. M. White, "The structure of cold dark matter halos," *Astrophysical Journal*, cilt 462, ss. 563–575, 1996.

[9] J. F. Navarro, C. S. Frenk, and S. D. M. White, "A universal density profile from hierarchical clustering," *Astrophysical Journal*, cilt 490, ss. 493–508, 1997.

[10] A. Burkert, "The structure of dark matter halos in dwarf galaxies," *Astrophysical Journal Letters*, cilt 447, ss. L25–L28, 1995.

[11] J. Wolf, G. D. Martinez, J. S. Bullock, M. Kaplinghat, M. Geha, R. R. Muñoz, J. D. Simon, and F. F. Avedo, "Accurate masses for dispersion-supported galaxies," *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, cilt 406, ss. 1220–1237, 2010.

[12] J. Bovy and S. Tremaine, "On the local dark matter density," *Astrophysical Journal*, cilt 756, makale 89, 2012.

[13] Planck Collaboration, "Planck 2018 results. VI. Cosmological parameters," *Astronomy & Astrophysics*, cilt 641, makale A6, 2020.

[14] W. J. G. de Blok, "The core-cusp problem," *Advances in Astronomy*, cilt 2010, makale 789293, 2010.

[15] J. I. Read, G. Iorio, O. Agertz, and F. Fraternali, "Understanding the shape and diversity of dwarf galaxy rotation curves in Λ CDM," *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, cilt 462, ss. 3628–3645, 2016.