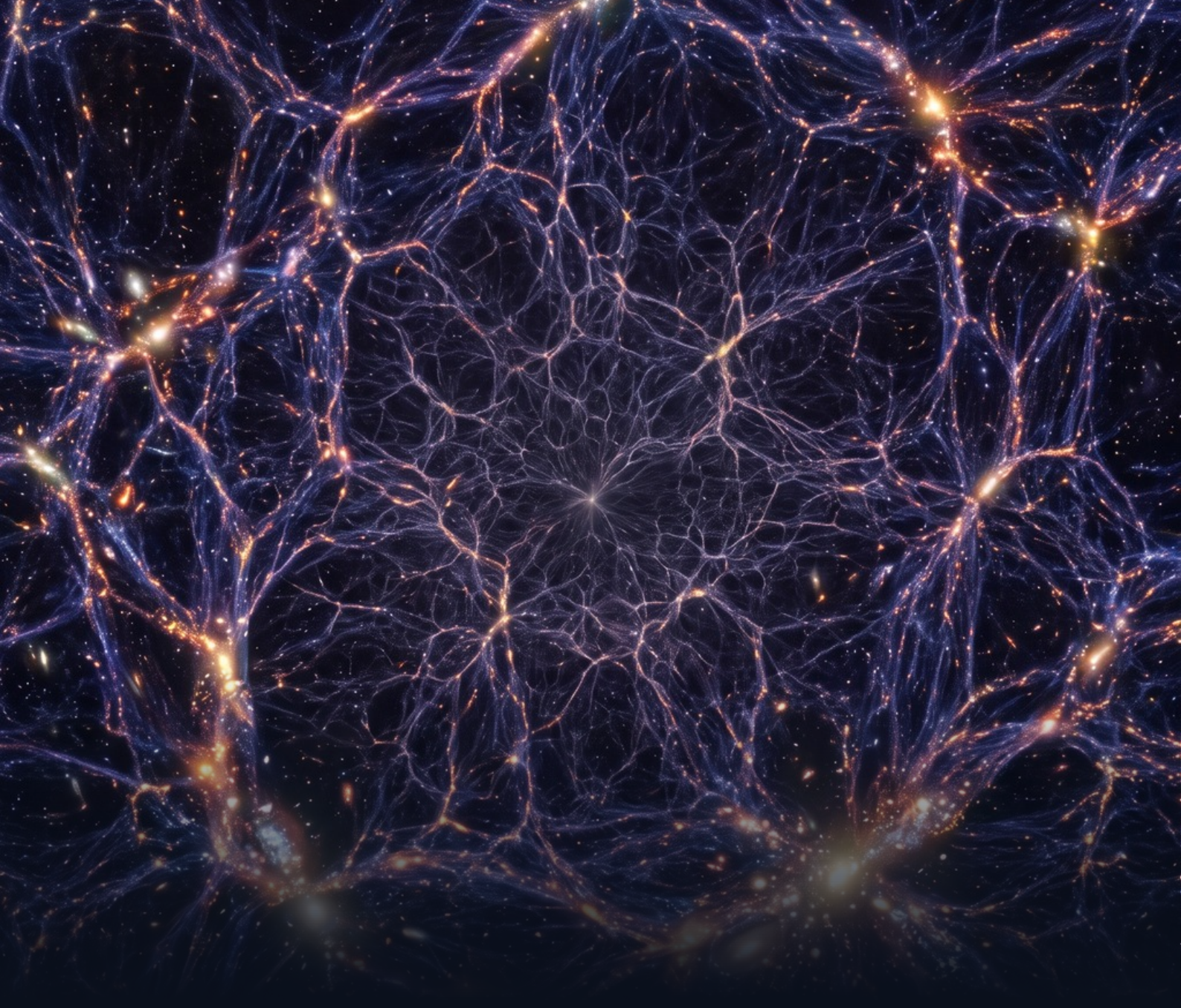




KOZMOLOJİ

FLRW Metriği Üzerinden Friedmann Denklemlerinin Türetimi ve İvmelenen Genişleme

Akademik Araştırma Makalesi

Teorik Astrofizik — Adım Adım Analitik Türetimler, Vektör Diyagramları ve Sayısal Tablolar

FLRW Metriği Üzerinden Friedmann Denklemlerinin Türetimi ve İvmelenen Genişleme

Kozmoloji

Eylül 2026

Özet. Friedmann denklemleri, modern homojen kozmolojinin dinamik çekirdeğini oluşturur. Genişleyen bir uzay-zamanın geometrisini Evren'in yoğunluğu, basıncı, eğriliği ve vakum enerjisi içeriği ile ilişkilendirir ve böylece sıcak Büyük Patlama, kozmik yaş ölçeği, kırmızıya kayma-uzaklık gözlemlerinin yorumu ve ivmelenen genişlemenin keşfi için kuramsal temeli sağlar. Bu makalede, eşhareketli çerçevede açık Christoffel sembolleri, Ricci bileşenleri ve mükemmel-akışkan gerilme-enerji tensörü kullanılarak Friedmann denklemlerinin Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker metriğinden adım adım türetimi verilmektedir. Akışkan denklemi kovaryant enerji korunumundan türetilmekte ve birinci Friedmann denkleminin zamana göre türevi ile ivme denkleminin birlikte kullanılmasına eşdeğer olduğu gösterilmektedir. Ardından durum denklemleri, yoğunluk parametreleri, analitik ölçek-çarpanı çözümleri, yaş integrali, yavaşlama parametresi, ışınım uzaklıkları ve Tip Ia süpernova Hubble diyagramı tartışılmaktadır. Ek çözümlü örneklerde kozmik yaş, kritik yoğunluk, geçiş kırmızıya kayması ve $z = 1$ konumundaki bir süpernovanın ışınım uzaklığı hesaplanmaktadır. Son olarak, Hubble gerilimi dâhil olmak üzere genişletmeler, gözlemsel sınamalar, varsayımlar ve açık sorunlar ele alınmaktadır.

Anahtar Kelimeler: kozmoloji; Friedmann denklemleri; FLRW metriği; karanlık enerji; kozmik ivmelenme; Tip Ia süpernovaları

1. Giriş

Modern fiziksel kozmoloji, yeterince büyük ölçeklerde ortalaması alındığında Evren'in homojen ve izotropiye yakın olduğu yönündeki dikkat çekici ampirik olguya dayanır. Galaksi taramaları güçlü yerel kümelenmeyi, filamentleri, duvarları ve boşlukları gösterir; buna karşın istatistiksel dağılım 100 Mpc mertebesindeki ve daha büyük ölçeklerde tekdüzeliğe yaklaşır. Kozmik mikrodalga arka plan ışınımı daha da çarpıcıdır: dipol ve ön planlar çıkarıldıktan sonra sıcaklık anizotropileri 10^{-5} mertebesinde. Bu gözlemler, büyük ölçeklerde hiçbir uzaysal konumun ve hiçbir uzaysal yönün ayrıcalıklı olmadığını söyleyen kozmolojik ilkeyi motive eder.

Bu ilkenin matematiksel sonucu son derece kısıtlayıcıdır. Uzayzaman metriği sabit eğrilikli uzaysal hiper-yüzeylere sahip olmalı ve zaman evrimi tek bir fonksiyonla, ölçek çarpanı $a(t)$ ile, betimlenmelidir. Ortaya çıkan Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW) metriği, bu nedenle, tam büyük ölçekli homojenlik ve izotropi ile uyumlu en genel metriktir. Bu metrik Einstein alan denklemlerine yerleştirildiğinde, tam tensör kuramı $a(t)$ için iki adi diferansiyel denkleme indirgenir: Friedmann denklemi ve ivme denklemi. Bu denklemler ilk kez 1920'lerde Friedmann ve Lemaître tarafından türetilmiş, daha sonra Robertson ve Walker tarafından modern geometrik biçimlerine kavuşturulmuştur [2, 3, 4, 5].

Friedmann denklemleri üç temel kozmolojik gözlemi açıklar. Birincisi, galaksilerin uzaklaşması önceden var olan Öklidyen bir uzay içindeki sıradan hareket değil, $a(t)$ büyüdükçe eşhareketli dünya çizgileri arasındaki öz uzaklığın artmasıdır. İkincisi, sıcak erken Evren, ışınım ve madde yoğunluklarının a azaldıkça hızla art-

masından kaynaklanır. Üçüncüsü, Tip Ia süpernovaları kullanarak keşfedilen geç-zamanlı ivmelenen genişleme [14, 15], kozmik enerji bütçesinin yeterince negatif basınca sahip bir bileşen içerdiğini gösterir; bunun en basit biçimi kozmolojik sabit Λ 'dır.

Bu makalenin amacı pedagojik olmakla birlikte titizdir. Denklemleri doğrudan metriktan türetiyor, c çarpanlarını ve uzaysal eğrilik parametresi k 'yı koruyoruz. Daha sonra yoğunluk parametrelerini, analitik sınır çözümlerini, ışınım uzaklığını, Evren'in yaşını ve Planck 2018'den sayısal değerleri tanıtarak biçimciliği gözlemlerle ilişkilendiriyoruz [16]. Düzey ve gösterim, Carroll ve Ostlie [1] gibi standart lisansüstü anlatımlar ve ileri astrofizik metinleriyle uyumlu olacak biçimde seçilmiştir.

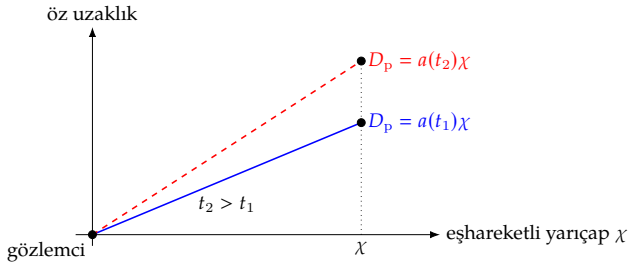
2. Fiziksel ve Matematiksel Çerçeve

2.1. Kozmolojik ilke

Tanım 1 (Kozmolojik ilke). Yeterince büyük uzaysal ölçeklerde Evren istatistiksel olarak homojen ve izotropiktir. İdealleştirilmiş tam sınırda, her uzaysal nokta diğer tüm noktalara ve her uzaysal yön diğer tüm yönlere eşdeğerdir.

Homojenlik ayrıcalıklı konumları ortadan kaldırır; her nokta etrafındaki izotropi ise ayrıcalıklı yönleri ortadan kaldırır. Birlikte, sabit kozmik zamanın uzaysal dilimlerinin sabit eğriliğe sahip olduğunu ima ederler. Bu tür üç-geometrilere bir eğrilik indisiyle sınıflandırılır:

$$k = \begin{cases} +1, & \text{kapalı pozitif-eğrilikli uzay,} \\ 0, & \text{uzaysal olarak düz Öklidyen uzay,} \\ -1, & \text{açık negatif-eğrilikli uzay.} \end{cases} \quad (1)$$



Şekil 1. Eşhareketli koordinatlar temel gözlemcileri etiketler. Bunların koordinat ayrılığı χ sabitken, öz uzaklık ölçek çarpanı $a(t)$ ile orantılı olarak büyür.

Boyutlu eğrilik yarıçapı $k = \pm 1$ ise ölçek çarpanı $a(t)$ içine soğurulur. $k = 0$ ise a 'nın normlanması konvansiyoneldir.

2.2. FLRW çizgi elemanı

Küresel eşhareketli koordinatlarda (t, r, θ, ϕ) FLRW çizgi elemanı

$$ds^2 = c^2 dt^2 - a^2(t) \left[\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \right]. \quad (2)$$

şeklinde. r koordinatı eşhareketlidir: düzgün kozmik akışkan içinde durgun olan serbest düşen galaksilerin r, θ, ϕ değerleri sabittir. Kozmik zaman t 'deki fiziksel, ya da öz, radyal uzaklık

$$D_p(t) = a(t)\chi, \quad (3)$$

olup burada radyal eşhareketli koordinat χ

$$d\chi = \frac{dr}{\sqrt{1 - kr^2}}. \quad (4)$$

ile tanımlanır. Böylece

$$\chi(r) = \begin{cases} \sin^{-1} r, & k = +1, \\ r, & k = 0, \\ \sinh^{-1} r, & k = -1. \end{cases} \quad (5)$$

Sabit χ için (3) denkleminin türevi, Hubble yasasını tam homojen biçimiyle verir:

$$v_{\text{rec}} = \dot{D}_p = \dot{a}\chi = \frac{\dot{a}}{a} D_p. \quad (6)$$

Dolayısıyla Hubble parametresi

$$H(t) \equiv \frac{\dot{a}(t)}{a(t)}. \quad (7)$$

şeklinde. Ölçek çarpanı a_e iken yayılan ve a_0 iken gözlenen bir fotonun kırmızıya kayması

$$1 + z = \frac{a_0}{a_e}. \quad (8)$$

ile verilir. Bugün için $a_0 = 1$ almak gelenekseldir.

Kırmızıya kayma bağıntısı ardışık dalga tepelerinden de doğrudan elde edilebilir. Radyal boş ışınlar için salma ve gözlem zamanları

$$\int_{t_e}^{t_0} \frac{c dt}{a(t)} = \int_{t_e + \delta t_e}^{t_0 + \delta t_0} \frac{c dt}{a(t)}. \quad (9)$$

bağıntısını sağlar. Neredeyse eşit iki integralin çıkarılması

$$\frac{\delta t_0}{a_0} = \frac{\delta t_e}{a_e}, \quad (10)$$

sonucunu ve dolayısıyla

$$1 + z = \frac{v_e}{v_0} = \frac{\delta t_0}{\delta t_e} = \frac{a_0}{a_e}. \quad (11)$$

ifadesini verir. Bu türetim, kozmolojik kırmızıya kaymanın statik bir arka planda yerel Doppler kaymalarının ardışık toplamı değil, boş jeodezikler boyunca bir metrik etkisi olduğunu vurgular.

3. FLRW Metriğinin Geometrisi

3.1. Metrik bileşenleri

(2) denkleminin uzaysal kısmını

$$dl^2 = \gamma_{ij} dx^i dx^j = \frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2, \quad (12)$$

şeklinde yazmak yararlıdır; böylece dört-metriğin bileşenleri

$$g_{00} = c^2, \quad g_{0i} = 0, \quad g_{ij} = -a^2(t) \gamma_{ij}. \quad (13)$$

olur. Ters metrik

$$g^{00} = \frac{1}{c^2}, \quad g^{0i} = 0, \quad g^{ij} = -\frac{1}{a^2(t)} \gamma^{ij}. \quad (14)$$

şeklinde. Determinant zamansal ve uzaysal çarpanlara ayrılır:

$$\sqrt{-g} = c a^3 \sqrt{\gamma} = \frac{c a^3 r^2 \sin \theta}{\sqrt{1 - kr^2}}. \quad (15)$$

Bu çarpan kovaryant korunumu denetlerken ve hacim elemanlarını kurarken yararlıdır. Sabit-zaman hiperyüzeyi üzerindeki öz hacim elemanı

$$dV_p = a^3 \frac{r^2 \sin \theta}{\sqrt{1 - kr^2}} dr d\theta d\phi. \quad (16)$$

şeklinde. 3.2. Christoffel sembolleri

Levi-Civita bağlantısı

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} = \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} (\partial_{\mu} g_{\nu\beta} + \partial_{\nu} g_{\mu\beta} - \partial_{\beta} g_{\mu\nu}). \quad (17)$$

ile verilir. Yalnızca $a(t)$ zamana bağlı olduğundan,

$$\partial_0 g_{ij} = -2a\dot{a} \gamma_{ij}, \quad (18)$$

burada üst nokta d/dt anlamına gelir. Karışık zaman-uzay sembolleri

$$\Gamma_{ij}^0 = -\frac{1}{2}g^{00}\partial_0 g_{ij} = \frac{a\dot{a}}{c^2}\gamma_{ij}, \quad (19)$$

$$\Gamma_{0j}^i = \frac{1}{2}g^{ik}\partial_0 g_{jk} = \frac{\dot{a}}{a}\delta_j^i = H\delta_j^i. \quad (20)$$

şeklinde. Saf zamansal semboller sıfırdır:

$$\Gamma_{00}^0 = 0, \quad \Gamma_{00}^i = 0, \quad \Gamma_{0i}^0 = 0. \quad (21)$$

Saf uzaysal semboller sabit-eğrilikli metrik γ_{ij} 'nin sembollerine eşittir:

$$\Gamma_{jk}^i = {}^{(3)}\Gamma_{jk}^i(\gamma). \quad (22)$$

Açıkça,

$${}^{(3)}\Gamma_{rr}^r = \frac{kr}{1-kr^2}, \quad {}^{(3)}\Gamma_{\theta\theta}^r = -r(1-kr^2), \quad (23)$$

$${}^{(3)}\Gamma_{\phi\phi}^r = -r(1-kr^2)\sin^2\theta, \quad {}^{(3)}\Gamma_{r\theta}^\theta = \frac{1}{r}, \quad (24)$$

$${}^{(3)}\Gamma_{r\phi}^\phi = \frac{1}{r}, \quad {}^{(3)}\Gamma_{\phi\phi}^\theta = -\sin\theta\cos\theta, \quad (25)$$

$${}^{(3)}\Gamma_{\theta\phi}^\phi = \cot\theta. \quad (26)$$

3.3. Ricci tensörü ve skaleri

Eğrilik konvansiyonu

$$R_{\sigma\mu\nu}^\rho = \partial_\mu\Gamma_{\nu\sigma}^\rho - \partial_\nu\Gamma_{\mu\sigma}^\rho + \Gamma_{\mu\lambda}^\rho\Gamma_{\nu\sigma}^\lambda - \Gamma_{\nu\lambda}^\rho\Gamma_{\mu\sigma}^\lambda, \quad (27)$$

olduğunda Ricci tensörü

$$R_{\mu\nu} = R_{\mu\alpha\nu}^\alpha. \quad (28)$$

ile tanımlanır. Zaman-zaman bileşeni için,

$$R_{00} = -\partial_0\Gamma_{0\alpha}^\alpha - \Gamma_{0\beta}^\alpha\Gamma_{0\alpha}^\beta \quad (29)$$

$$= -\frac{d}{dt}(3H) - 3H^2 = -3(\dot{H} + H^2) \quad (30)$$

$$= -3\frac{\ddot{a}}{a}. \quad (31)$$

Uzaysal bileşenler için

$$R_{ij} = \left(\frac{a\ddot{a}}{c^2} + \frac{2\dot{a}^2}{c^2} + 2k\right)\gamma_{ij}. \quad (32)$$

elde edilir. Eşdeğer olarak, $g_{ij} = -a^2\gamma_{ij}$ olduğundan,

$$R_{ij} = -\left[\frac{\ddot{a}}{ac^2} + \frac{2H^2}{c^2} + \frac{2k}{a^2}\right]g_{ij}. \quad (33)$$

Karışık zaman-uzay bileşenleri sıfırdır:

$$R_{0i} = 0. \quad (34)$$

Kontraksiyon Ricci skalerini verir:

$$R = g^{00}R_{00} + g^{ij}R_{ij} \quad (35)$$

$$= -6\left[\frac{\ddot{a}}{ac^2} + \frac{H^2}{c^2} + \frac{k}{a^2}\right]. \quad (36)$$

Saf uzaysal metrik γ_{ij} içsel Ricci tensörüne ve skalerine sahiptir:

$${}^{(3)}R_{ij}(\gamma) = 2k\gamma_{ij}, \quad (37)$$

$${}^{(3)}R(\gamma) = 6k. \quad (38)$$

Fiziksel uzaysal metrik $a^2\gamma_{ij}$ için uzunluklar a ile çarpılır ve eğrilik uzunluğun karesiyle ters orantılı ölçeklenir; bu nedenle

$${}^{(3)}R_{\text{phys}} = \frac{6k}{a^2}. \quad (39)$$

(39) denklemi, Friedmann kısıtındaki kc^2/a^2 teriminin geometrik kökenidir.

Einstein tensörü

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu}. \quad (40)$$

ile tanımlanır. Sıfır olmayan bağımsız FLRW bileşenleri

$$G_{00} = 3\left(H^2 + \frac{kc^2}{a^2}\right), \quad (41)$$

$$G_{ij} = -\left(2\frac{\ddot{a}}{a} + H^2 + \frac{kc^2}{a^2}\right)g_{ij}. \quad (42)$$

şeklinde. (41) denklemi birinci Friedmann denkleminin geometrik kökeni, (42) ise ivme denkleminin kökenidir.

4. Madde Kaynağı: Mükemmel Akışkan

Büyük ölçeklerde tüm madde ve ışıınım mükemmel akışkanla yaklaşılanır. Yerel durgun çerçevede gerilme-enerji tensörü köşegendir:

$$T_{\hat{\nu}}^{\hat{\mu}} = \text{diag}(\rho c^2, -p, -p, -p), \quad (43)$$

burada ρ, c^2 'ye bölünmüş kütle-enerji yoğunluğu, p ise izotropik basınçtır. Kovaryant olarak,

$$T_{\mu\nu} = \left(\rho + \frac{p}{c^2}\right)u_\mu u_\nu - pg_{\mu\nu}, \quad (44)$$

ve

$$u^\mu u_\mu = c^2. \quad (45)$$

sağlanır. Eşhareketli bir gözlemci için,

$$u^\mu = (1, 0, 0, 0), \quad u_\mu = (c^2, 0, 0, 0). \quad (46)$$

Böylece

$$T_{00} = \rho c^4, \quad (47)$$

$$T_{ij} = p a^2 \gamma_{ij} = -p g_{ij}. \quad (48)$$

Basınç kütleçekime katkıda bulunur; çünkü $T_{\mu\nu}$ tensörünün uzaysal bileşenlerinde görünür ve dolayısıyla uzayzaman eğriliğini etkiler.

Mükemmel-akışkan gerilme-enerji tensörünün izi

$$T = g^{\mu\nu}T_{\mu\nu} = \rho c^2 - 3p. \quad (49)$$

şeklinde. Dolayısıyla $p = \rho c^2/3$ olan ışınım izsiz bir gerilme-enerji tensörüne sahiptir:

$$T_{\text{rad}} = 0. \quad (50)$$

Bu olgu, dört uzayzaman boyutunda serbestçe yayılan elektromanyetik ışınımın konformal değişmezliği ile yakından ilişkilidir.

5. Friedmann Denklemlerinin Türetimi

İşaret konvansiyonunu

$$G_{\mu\nu} - \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}. \quad (51)$$

olarak alıyoruz. Eğrilik konvansiyonu (27) ile bu, aşağıda kullanılan standart kozmolojik işaretleri verir.

5.1. Birinci Friedmann denklemi

(51) denkleminin 00 bileşeni

$$G_{00} - \Lambda g_{00} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{00}. \quad (52)$$

şeklinde. (41), (47) ve $g_{00} = c^2$ kullanılırsa

$$3 \left(H^2 + \frac{kc^2}{a^2} \right) - \Lambda c^2 = 8\pi G \rho. \quad (53)$$

elde edilir. H^2 için çözmek birinci Friedmann denklemini verir:

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho - \frac{kc^2}{a^2} + \frac{\Lambda c^2}{3}. \quad (54)$$

Not 1. (54) denklemindeki terimler açık anlamlara sahiptir: madde ve ışınım yoğunluğu H^2 'yi artırır, pozitif uzaysal eğrilik H^2 'yi azaltır, negatif eğrilik onu artırır ve pozitif bir kozmolojik sabit genişlemeyi ivmelendiren sabit bir enerji yoğunluğu gibi davranır.

5.2. İkinci Friedmann denklemi

(51) denkleminin uzaysal kısmı

$$G_{ij} - \Lambda g_{ij} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{ij}. \quad (55)$$

şeklinde. (42) ve (48) yerine konulduğunda bağımsız uzaysal denklem

$$2\frac{\ddot{a}}{a} + H^2 + \frac{kc^2}{a^2} - \Lambda c^2 = -\frac{8\pi G}{c^2} p. \quad (56)$$

elde edilir. (54) kullanılarak $H^2 + kc^2/a^2$ yok edilirse

$$2\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{8\pi G}{3} \rho + \frac{\Lambda c^2}{3} - \Lambda c^2 = -\frac{8\pi G}{c^2} p, \quad (57)$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3} \left(\rho + \frac{3p}{c^2} \right) + \frac{\Lambda c^2}{3}. \quad (58)$$

(58) denklemi ivme denklemdir.

Not 2. Etkin kütleçekimsel kütle yoğunluğu $\rho + 3p/c^2$ 'dir. Işınım, $p = \rho c^2/3$ olduğundan tozdan daha güçlü kütleçekir. Vakum enerjisi $p = -\rho c^2$ değerine sahiptir; bu da $\rho + 3p/c^2 = -2\rho$ yapar ve dolayısıyla ivmelenmeyi sürer.

5.3. Kovaryant korunumdan akışkan denklemi

Kontrakte Bianchi özdeşliği

$$\nabla_\mu G^{\mu\nu} = 0. \quad (59)$$

gerektirir. $\nabla_\mu g^{\mu\nu} = 0$ olduğundan, (51) yerel gerilme-enerji korunumunu ima eder:

$$\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0. \quad (60)$$

Eşhareketli FLRW çerçevesinde $\nu = 0$ için,

$$\dot{\rho} + 3H \left(\rho + \frac{p}{c^2} \right) = 0. \quad (61)$$

Aynı denklem termodinamik olarak da elde edilir. $V \propto a^3$ olan eşhareketli bir hacimdeki enerji

$$E = \rho c^2 a^3. \quad (62)$$

şeklinde. Adyabatik genişleme

$$dE = -p d(a^3). \quad (63)$$

bağıntısına uyar. Zamana göre türev alınır,

$$c^2 \frac{d}{dt}(\rho a^3) = -p \frac{d}{dt}(a^3). \quad (64)$$

Her iki taraf açıldığında

$$c^2 a^3 \dot{\rho} + 3c^2 a^2 \dot{a} \rho = -3p a^2 \dot{a}, \quad (65)$$

ve $c^2 a^3$ ile bölündüğünde (61) elde edilir.

5.4. Denklemlerin eşdeğerliği

(54), (58) ve (61) denklemlerinden yalnızca ikisi bağımsızdır. (54) denklemini türevleyelim:

$$2H\dot{H} = \frac{8\pi G}{3} \dot{\rho} + \frac{2kc^2 \dot{a}}{a^3}. \quad (66)$$

(61) kullanılarak

$$2H\dot{H} = -8\pi GH \left(\rho + \frac{p}{c^2} \right) + \frac{2kc^2 \dot{a}}{a^2}. \quad (67)$$

elde edilir. $H \neq 0$ için,

$$\dot{H} = -4\pi G \left(\rho + \frac{p}{c^2} \right) + \frac{kc^2}{a^2}. \quad (68)$$

Ayrıca

$$\frac{\ddot{a}}{a} = \dot{H} + H^2, \quad (69)$$

olduğundan, (54) ve (68) denklemlerinin yerine konulması

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3} \left(\rho + \frac{3p}{c^2} \right) + \frac{\Lambda c^2}{3}, \quad (70)$$

sonucunu verir; bu da tam olarak (58) denklemdir.

6. Durum Denklemleri ve Yoğunluk Ölçeklenmesi

Barotropik bir kozmik bileşen çoğu zaman

$$p = w\rho c^2, \quad (71)$$

ile tanımlanır; burada w sabittir. Akışkan denklemi

$$\dot{\rho} + 3H\rho(1+w) = 0. \quad (72)$$

halini alır. $H = \dot{a}/a$ kullanılırsa,

$$\frac{\dot{\rho}}{\rho} = -3(1+w)\frac{\dot{a}}{a}. \quad (73)$$

İntegrasyonla,

$$\ln\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right) = -3(1+w)\ln\left(\frac{a}{a_0}\right), \quad (74)$$

dolayısıyla

$$\rho(a) = \rho_0 \left(\frac{a}{a_0}\right)^{-3(1+w)}. \quad (75)$$

elde edilir.

Önemli durumlar şunlardır:

$$w = 0 : \quad \rho_m \propto a^{-3}, \quad (76)$$

$$w = \frac{1}{3} : \quad \rho_r \propto a^{-4}, \quad (77)$$

$$w = -1 : \quad \rho_\Lambda = \text{sabit}. \quad (78)$$

Madde hacim genişlemesiyle seyrelir. Işınım hem hacimle hem de foton kırmızıya kaymasıyla seyrelir. Vakum enerjisi sabit kalır; çünkü negatif basıncı artan hacmi tam olarak telafi eden iş yapar.

Kozmolojik sabit etkin bir akışkan olarak yazılabilir:

$$\rho_\Lambda = \frac{\Lambda c^2}{8\pi G}, \quad (79)$$

$$p_\Lambda = -\rho_\Lambda c^2, \quad (80)$$

$$w_\Lambda = -1. \quad (81)$$

w sabit değilse, aynı ayrıştırma daha genel ifadeyi verir:

$$\rho(a) = \rho_0 \exp\left[-3 \int_1^a (1+w(a')) \frac{da'}{a'}\right]. \quad (82)$$

Yaygın bir fenomenolojik biçim

$$w(a) = w_0 + w_a(1-a), \quad (83)$$

olup bu durumda (82)

$$\rho_{\text{de}}(a) = \rho_{\text{de},0} a^{-3(1+w_0+w_a)} \exp[-3w_a(1-a)]. \quad (84)$$

haline gelir. Λ CDM sınırı $w_0 = -1$ ve $w_a = 0$ alınarak geri kazanılır.

7. Yoğunluk Parametreleri ve Toplam Kuralı

Kritik yoğunluk

$$\rho_c(t) = \frac{3H^2(t)}{8\pi G}. \quad (85)$$

ile tanımlanır. Her bileşen için,

$$\Omega_i(t) = \frac{\rho_i(t)}{\rho_c(t)}. \quad (86)$$

Kozmolojik sabit yoğunluk parametresi

$$\Omega_\Lambda(t) = \frac{\Lambda c^2}{3H^2(t)}. \quad (87)$$

şeklindedir. Eğrilik yoğunluk parametresi

$$\Omega_k(t) = -\frac{kc^2}{a^2H^2}. \quad (88)$$

olarak tanımlanır. (54) denkleminin H^2 'ye bölünmesi

$$1 = \Omega_m + \Omega_r + \Omega_\Lambda + \Omega_k. \quad (89)$$

sonucunu verir. $a_0 = 1$ için genişleme fonksiyonu

$$E(a) \equiv \frac{H(a)}{H_0}. \quad (90)$$

şeklindedir. Madde, ışıınım, eğrilik ve Λ için,

$$E^2(a) = \Omega_{r0}a^{-4} + \Omega_{m0}a^{-3} + \Omega_{k0}a^{-2} + \Omega_{\Lambda0}. \quad (91)$$

Eşdeğer olarak kırmızıya kaymada,

$$E^2(z) = \Omega_{r0}(1+z)^4 + \Omega_{m0}(1+z)^3 + \Omega_{k0}(1+z)^2 + \Omega_{\Lambda0}. \quad (92)$$

Zamana bağlı kesirsel yoğunluklar

$$\Omega_m(a) = \frac{\Omega_{m0}a^{-3}}{E^2(a)}, \quad (93)$$

$$\Omega_r(a) = \frac{\Omega_{r0}a^{-4}}{E^2(a)}, \quad (94)$$

$$\Omega_\Lambda(a) = \frac{\Omega_{\Lambda0}}{E^2(a)}, \quad (95)$$

$$\Omega_k(a) = \frac{\Omega_{k0}a^{-2}}{E^2(a)}. \quad (96)$$

şeklindedir.

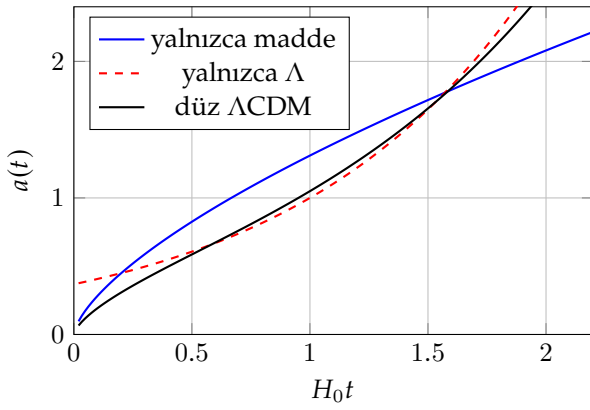
Işınım–madde eşitliği $\rho_r(a) = \rho_m(a)$ olduğunda gerçekleşir; yani

$$a_{\text{eq}} = \frac{\Omega_{r0}}{\Omega_{m0}}, \quad z_{\text{eq}} = \frac{\Omega_{m0}}{\Omega_{r0}} - 1. \quad (97)$$

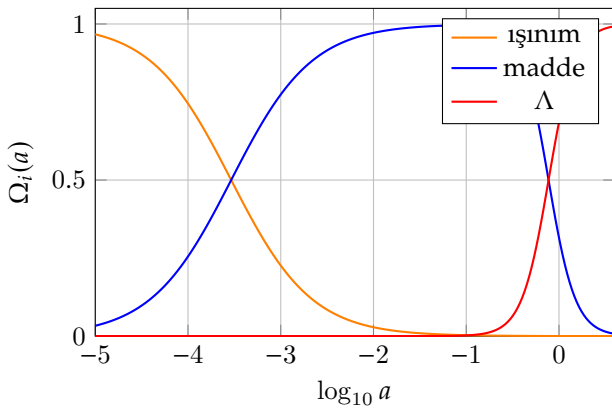
Madde–vakum eşitliği $\rho_m(a) = \rho_\Lambda$ olduğunda gerçekleşir ve

$$a_{m\Lambda} = \left(\frac{\Omega_{m0}}{\Omega_{\Lambda0}}\right)^{1/3}, \quad z_{m\Lambda} = \left(\frac{\Omega_{\Lambda0}}{\Omega_{m0}}\right)^{1/3} - 1. \quad (98)$$

verir. Bu eşitlik ivmelenmenin başlangıcıyla aynı değildir; ivmelenme düz madde-artı- Λ evreninde daha güçlü koşul olan $\rho_m < 2\rho_\Lambda$ gerektirir.



Şekil 2. Ölçek-çarpanı geçişleri. Madde baskınlığı $a \propto t^{2/3}$ verir, saf vakum enerjisi üstel genişleme verir ve düz Λ CDM madde-benzeri erken davranıştan geç ivmelenmeye geçiş yapar.



Şekil 3. Neredeyse düz Planck-benzeri bir model için kesirsel yoğunlukların evrimi. Çok küçük a değerlerinde ışıınım, orta a değerlerinde madde ve geç zamanlarda vakum enerjisi baskındır.

8. Analitik Ölçek-Çarpanı Çözümleri

8.1. Madde baskınlığı

Düz, yalnızca madde içeren bir evren için,

$$H^2 = H_0^2 a^{-3}. \quad (99)$$

$H = \dot{a}/a$ olduğundan,

$$\dot{a} = H_0 a^{-1/2}. \quad (100)$$

Değişkenler ayrılırsa,

$$a^{1/2} da = H_0 dt. \quad (101)$$

$a = 0$ ve $t = 0$ koşullarıyla integrasyon

$$\frac{2}{3} a^{3/2} = H_0 t. \quad (102)$$

verir. Dolayısıyla

$$a(t) = \left(\frac{3H_0 t}{2} \right)^{2/3}. \quad (103)$$

Bu nedenle madde-baskın genişleme yavaşlar:

$$\ddot{a} < 0. \quad (104)$$

8.2. Işıınım baskınlığı

Düz, yalnızca ışıınım içeren bir evren için,

$$H^2 = H_0^2 a^{-4}. \quad (105)$$

Böylece

$$\dot{a} = H_0 a^{-1}. \quad (106)$$

Değişkenleri ayırıp integre ederek,

$$a da = H_0 dt, \quad (107)$$

ve

$$\frac{1}{2} a^2 = H_0 t. \quad (108)$$

elde edilir. Dolayısıyla

$$a(t) = (2H_0 t)^{1/2}. \quad (109)$$

Basınç kütleçekime pozitif katkıda bulunduğuundan ışıınım maddeden daha güçlü biçimde yavaşlar.

8.3. Vakum baskınlığı

Saf pozitif Λ için,

$$H^2 = \frac{\Lambda c^2}{3} \equiv H_\Lambda^2. \quad (110)$$

Dolayısıyla

$$\frac{\dot{a}}{a} = H_\Lambda. \quad (111)$$

İntegrasyon

$$a(t) = a_i \exp[H_\Lambda(t - t_i)]. \quad (112)$$

sonucunu verir. İvme

$$\frac{\ddot{a}}{a} = H_\Lambda^2 > 0. \quad (113)$$

şeklindedir.

8.4. Düz madde artı kozmolojik sabit

Uzaysal olarak düz, basınçsız madde ve Λ içeren bir evren için,

$$H^2 = H_0^2 (\Omega_m a^{-3} + \Omega_\Lambda), \quad (114)$$

ve

$$\Omega_m + \Omega_\Lambda = 1. \quad (115)$$

Diferansiyel denklem

$$\frac{\dot{a}}{a} = H_0 (\Omega_m a^{-3} + \Omega_\Lambda)^{1/2}. \quad (116)$$

şeklindedir. Şu değişkeni tanımlayalım:

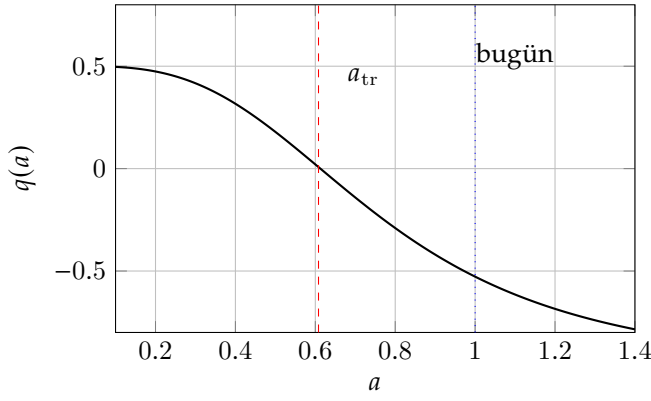
$$y = a^{3/2}. \quad (117)$$

O halde

$$\dot{y} = \frac{3}{2} a^{1/2} \dot{a}. \quad (118)$$

(116) kullanılarak

$$\dot{y} = \frac{3}{2} H_0 (\Omega_m + \Omega_\Lambda y^2)^{1/2}. \quad (119)$$



Şekil 4. Düz madde artı Λ için yavaşlama parametresi. Geçiş $q = 0$ olduğunda gerçekleşir; Planck-benzeri parametreler için bu $z_{tr} \approx 0.64$ değerine karşılık gelir.

Ayrıştırılalım:

$$\frac{dy}{\sqrt{\Omega_m + \Omega_\Lambda y^2}} = \frac{3}{2} H_0 dt. \quad (120)$$

İntegral

$$\frac{1}{\sqrt{\Omega_\Lambda}} \sinh^{-1} \left(y \sqrt{\frac{\Omega_\Lambda}{\Omega_m}} \right) = \frac{3}{2} H_0 t. \quad (121)$$

şeklinde. $a = y^{2/3}$ için çözmek

$$a(t) = \left(\frac{\Omega_m}{\Omega_\Lambda} \right)^{1/3} \sinh^{2/3} \left[\frac{3}{2} H_0 \sqrt{\Omega_\Lambda} t \right]. \quad (122)$$

sonucunu verir. Bu çözüm erken zamanlarda $t^{2/3}$, geç zamanlarda ise $\exp(H_0 \sqrt{\Omega_\Lambda} t)$ gibi davranır.

9. Yaş, Yavaşlama ve Uzaklıklar

$E(z)$ ile belirtilen bir modelde Evren'in yaşı

$$t_0 = \int_0^{t_0} dt = \frac{1}{H_0} \int_0^\infty \frac{dz}{(1+z)E(z)}. \quad (123)$$

ile verilir. Eşdeğer olarak,

$$t(a) = \frac{1}{H_0} \int_0^a \frac{da'}{a' E(a')}. \quad (124)$$

Düz madde artı Λ için (122)

$$t_0 = \frac{2}{3H_0 \sqrt{\Omega_\Lambda}} \sinh^{-1} \sqrt{\frac{\Omega_\Lambda}{\Omega_m}}. \quad (125)$$

sonucunu verir.

z kırmızıya kaymasına kadar geriye bakış zamanı

$$t_L(z) = t_0 - t(z) = \frac{1}{H_0} \int_0^z \frac{dz'}{(1+z')E(z')}. \quad (126)$$

şeklinde. $1+z = a^{-1}$ olduğundan, türev alma

$$\frac{dt}{dz} = -\frac{1}{(1+z)H(z)}. \quad (127)$$

bağıntısını verir. Bu bağıntı, pasif olarak evrilen galaksilerin diferansiyel yaşlarının dz/dt için gözlemsel bir tahmin sağladığı $H(z)$ kronometre ölçümlerinde kullanılır.

Yavaşlama parametresi

$$q(t) \equiv -\frac{a\ddot{a}}{\dot{a}^2} = -\frac{\ddot{a}/a}{H^2}. \quad (128)$$

ile tanımlanır. (58) kullanılırsa,

$$q = \frac{4\pi G}{3H^2} \left(\rho + \frac{3p}{c^2} \right) - \Omega_\Lambda. \quad (129)$$

Madde, ışıınım ve Λ için,

$$q = \frac{1}{2} \Omega_m + \Omega_r - \Omega_\Lambda. \quad (130)$$

Geç zamanlarda ışıınım ihmal edilebilir; dolayısıyla

$$q_0 \approx \frac{\Omega_{m0}}{2} - \Omega_{\Lambda 0}. \quad (131)$$

İvmelenme $q = 0$ olduğunda başlar. Düz madde artı Λ için,

$$\frac{1}{2} \Omega_m(a_{tr}) = \Omega_\Lambda(a_{tr}). \quad (132)$$

Bu,

$$a_{tr} = \left(\frac{\Omega_m}{2\Omega_\Lambda} \right)^{1/3}, \quad (133)$$

veya

$$z_{tr} = \left(\frac{2\Omega_\Lambda}{\Omega_m} \right)^{1/3} - 1. \quad (134)$$

verir.

Işık ışınları için $ds^2 = 0$ olur. Radyal yayılım

$$c \frac{dt}{a(t)} = d\chi. \quad (135)$$

bağıntısına uyar. Görüş doğrultusu eşhareketli uzaklığı

$$D_C(z) = \frac{c}{H_0} \int_0^z \frac{dz'}{E(z')}. \quad (136)$$

şeklinde. Enine eşhareketli uzaklık

$$D_M = \begin{cases} \frac{c}{H_0 \sqrt{\Omega_k}} \sinh(\sqrt{\Omega_k} H_0 D_C / c), & \Omega_k > 0, \\ D_C, & \Omega_k = 0, \\ \frac{c}{H_0 \sqrt{|\Omega_k|}} \sin(\sqrt{|\Omega_k|} H_0 D_C / c), & \Omega_k < 0. \end{cases} \quad (137)$$

ile verilir. Açıl-çap uzaklığı

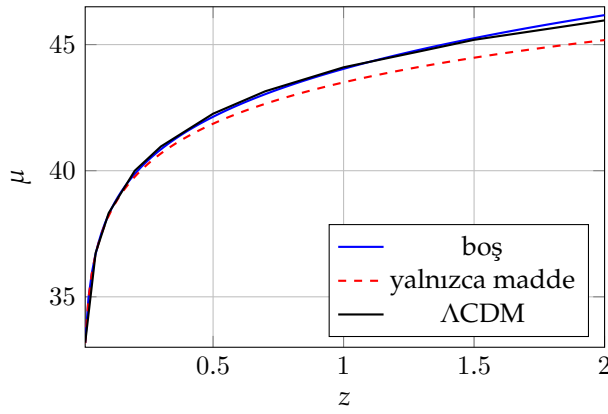
$$D_A(z) = \frac{D_M(z)}{1+z}. \quad (138)$$

şeklinde. Işıınım uzaklığı

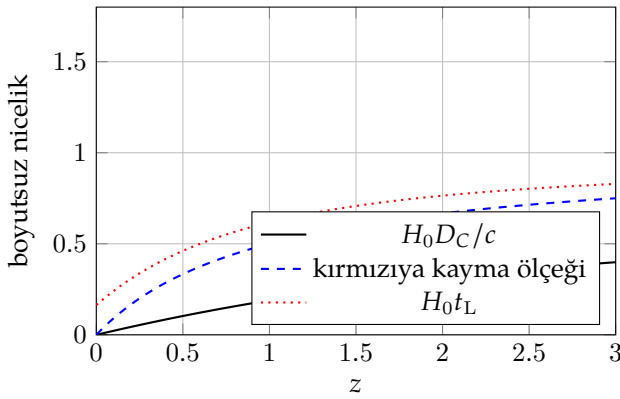
$$D_L(z) = (1+z) D_M(z). \quad (139)$$

olur. (138) ve (139) denklemleri Etherington karşılıklı-lık bağıntısını ima eder:

$$D_L = (1+z)^2 D_A, \quad (140)$$



Şekil 5. Işınım-uzaklığı formüllerinden hesaplanan nitel Hubble diyagramı. Sabit kırmızıya kaymada, düz ve ivmelenen bir Λ CDM evreni, Einstein–de Sitter yalnızca-madde modelinden daha büyük uzaklıklar öngörür; bu, Tip Ia süpernovalarıyla ölçülen temel imzadır.



Şekil 6. Düz Planck-benzeri bir Λ CDM kozmolojisi için boyutsuz uzaklık ve geriye bakış zamanı davranışı. Uzaklıklar küçük z değerlerinde neredeyse doğrusal büyürken, geriye bakış zamanı yüksek kırmızıya kaymada Hubble zamanının sonlu bir kesrine yaklaşır.

bu bağıntı fotonlar boş jeodezikler üzerinde yol aldığı ve foton sayısı korunduğu sürece geçerlidir. Uzaklık modülü

$$\mu = m - M = 5 \log_{10} \left(\frac{D_L}{10 \text{ pc}} \right). \quad (141)$$

şeklinde. Tip Ia süpernovaları $\mu(z)$ 'yi belirler ve bu nedenle genişleme geçmişinin integralini doğrudan yoklar.

Katı aç $d\Omega$ kapsayan bir tarama için eşareketli hacim elemanı

$$\frac{dV_C}{dz d\Omega} = \frac{c D_M^2(z)}{H_0 E(z)}. \quad (142)$$

ile verilir. Bu nicelik galaksiler, kümeler ve kuasarlar kullanılarak yapılan sayı-sayımı testlerine girer.

10. Çözümlü Sayısal Uygulamalar

Planck 2018 temel parametrelerinin temsili değerlerini [16]

$$H_0 = 67.4 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}, \quad \Omega_{m0} = 0.315, \quad (143)$$

ve neredeyse düz bir evren kabul ediyoruz; dolayısıyla

$$\Omega_{\Lambda 0} \simeq 1 - \Omega_{m0} = 0.685. \quad (144)$$

SI birimlerinde Hubble sabiti

$$H_0 = 67.4 \frac{10^3 \text{ m s}^{-1}}{3.0856776 \times 10^{22} \text{ m}} \quad (145)$$

$$= 2.184 \times 10^{-18} \text{ s}^{-1}. \quad (146)$$

şeklinde. Hubble zamanı

$$H_0^{-1} = 4.579 \times 10^{17} \text{ s} = 14.51 \text{ Gyr}. \quad (147)$$

olur. Güncel kritik yoğunluk

$$\rho_{c0} = \frac{3H_0^2}{8\pi G} \quad (148)$$

$$= \frac{3(2.184 \times 10^{-18} \text{ s}^{-1})^2}{8\pi(6.6743 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2})} \quad (149)$$

$$= 8.53 \times 10^{-27} \text{ kg m}^{-3}. \quad (150)$$

Madde yoğunluğu

$$\rho_{m0} = \Omega_{m0} \rho_{c0} = 2.69 \times 10^{-27} \text{ kg m}^{-3}. \quad (151)$$

şeklinde. Analitik düz Λ CDM yaşı

$$t_0 = \frac{2}{3H_0 \sqrt{0.685}} \sinh^{-1} \sqrt{\frac{0.685}{0.315}} \quad (152)$$

$$= 0.951 H_0^{-1} = 13.80 \text{ Gyr}. \quad (153)$$

olarak bulunur. Güncel yavaşlama parametresi

$$q_0 = \frac{0.315}{2} - 0.685 = -0.528. \quad (154)$$

şeklinde. Geçiş kırmızıya kayması

$$z_{\text{tr}} = \left(\frac{2(0.685)}{0.315} \right)^{1/3} - 1 \quad (155)$$

$$= 0.63. \quad (156)$$

olur. Bu, küçük kaymaların ışıma, eğriliğe ve kesin karanlık-enerji modeline bağlı olduğu, yaygın olarak verilen $z_{\text{tr}} \simeq 0.6\text{--}0.7$ aralığıdır.

(144) denkleminde karşılık gelen vakum yoğunluğu

$$\rho_{\Lambda 0} = 0.685 \rho_{c0} = 5.84 \times 10^{-27} \text{ kg m}^{-3}. \quad (157)$$

şeklinde. İlgili kozmolojik sabit

$$\Lambda = \frac{8\pi G \rho_{\Lambda 0}}{c^2} \quad (158)$$

$$= 1.09 \times 10^{-52} \text{ m}^{-2}. \quad (159)$$

olur. Madde–vakum eşitliği

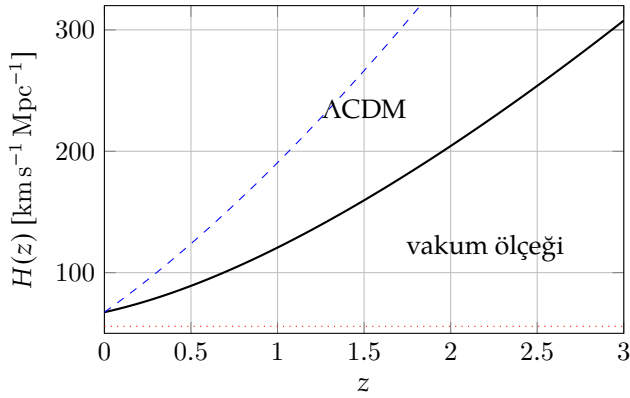
$$z_{m\Lambda} = \left(\frac{0.685}{0.315} \right)^{1/3} - 1 \quad (160)$$

$$= 0.30. \quad (161)$$

değerinde gerçekleşmiştir. İvmelenmenin daha erken, $z_{\text{tr}} = 0.63$ 'te başlaması, $\rho_m = 2\rho_\Lambda$ koşulundaki iki çarpınını yansıtır.

Tablo 1. Planck 2018 düz Λ CDM kozmolojisi için temsili sayısal nicelikler.

Nicelik	Değer	Anlam
H_0	$67.4 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$	genişleme hızı
Ω_{m0}	0.315	madde kesri
$\Omega_{\Lambda 0}$	0.685	vakum kesri
H_0^{-1}	14.51 Gyr	Hubble zamanı
ρ_{c0}	$8.53 \times 10^{-27} \text{ kg m}^{-3}$	kritik yoğunluk
t_0	13.80 Gyr	kozmik yaş
q_0	-0.528	güncel ivmelenme
z_{tr}	0.63	ivmelenme geçişi

**Şekil 7.** Düz Λ CDM için genişleme hızı ve yalnızca-madde ölçeklenmesiyle karşılaştırması. Yüksek kırmızıya kaymada madde baskındır ve $H \propto (1+z)^{3/2}$; geç zamanlarda ise H , vakum ölçeği $H_0\sqrt{\Omega_{\Lambda}}$ değerine yaklaşır.

11. Çözümlü Bir Uzaklık Örneği: $z = 1$ Kozmunda Bir Süpernova

Aynı düz Planck-benzeri kozmolojide kırmızıya kayması $z = 1$ olan bir Tip Ia süpernova düşünelim. Bu kırmızıya kaymada ışınım ihmal edilirse,

$$E(z) = \sqrt{0.315(1+z)^3 + 0.685}. \quad (162)$$

Eşhareketli uzaklık

$$D_C(1) = \frac{c}{H_0} \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{0.315(1+z)^3 + 0.685}}. \quad (163)$$

şeklinde. Hubble uzaklığı

$$\frac{c}{H_0} = \frac{2.99792458 \times 10^5 \text{ km s}^{-1}}{67.4 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}} \quad (164)$$

$$= 4.448 \times 10^3 \text{ Mpc}. \quad (165)$$

olur. $\Delta z = 0.25$ adımlı bir Simpson-kuralı tahmini

$$I = \int_0^1 \frac{dz}{E(z)} \simeq \frac{\Delta z}{3} [f_0 + f_4 + 4(f_1 + f_3) + 2f_2], \quad (166)$$

kullanır; burada

$$f_i = \frac{1}{E(i\Delta z)}. \quad (167)$$

Beş değer yaklaşık olarak

$$(f_0, f_1, f_2, f_3, f_4) = (1.000, 0.877, 0.756, 0.646, 0.559). \quad (168)$$

şeklinde. Böylece

$$I \simeq \frac{0.25}{3} [1.000 + 0.559 + 4(0.877 + 0.646) + 2(0.756)] \quad (169)$$

$$= 0.765. \quad (170)$$

Dolayısıyla

$$D_C(1) = 0.765(4.448 \times 10^3 \text{ Mpc}) = 3.40 \times 10^3 \text{ Mpc}. \quad (171)$$

Düzlük $D_M = D_C$ verir; bu nedenle ışınım uzaklığı

$$D_L(1) = (1+1)D_C(1) = 6.80 \times 10^3 \text{ Mpc}. \quad (172)$$

olur. Parsek cinsinden,

$$D_L(1) = 6.80 \times 10^9 \text{ pc}. \quad (173)$$

Uzaklık modülü (141) denklemini izler:

$$\mu(1) = 5 \log_{10} \left(\frac{6.80 \times 10^9 \text{ pc}}{10 \text{ pc}} \right) \quad (174)$$

$$= 44.16. \quad (175)$$

Standartlaştırılmış Tip Ia mutlak parlaklığı $M \simeq -19.3$ için görünür parlaklık

$$m = M + \mu \simeq 24.9. \quad (176)$$

olurdu. Bu basit hesap, yüksek-kırmızıya-kaymalı süpernova kozmolojisinin neden büyük teleskoplar ve dikkatli kalibrasyon gerektirdiğini gösterir: gözlemsel sinyal alternatif kozmolojilere göre yalnızca birkaç onda büyüklüğündeki parlaklık farklarında kodlanmıştır.

Aynı kırmızıya kaymanın geriye bakış zamanı

$$t_L(1) = H_0^{-1} \int_0^1 \frac{dz}{(1+z)E(z)}. \quad (177)$$

şeklinde. Aynı Simpson düğümleri kullanıldığında

$$H_0 t_L(1) \simeq 0.552, \quad (178)$$

veya

$$t_L(1) \simeq 8.01 \text{ Gyr}. \quad (179)$$

elde edilir. Sonuç olarak salım anındaki kozmik yaş

$$t(z=1) \simeq 13.80 \text{ Gyr} - 8.01 \text{ Gyr} = 5.79 \text{ Gyr}. \quad (180)$$

olmuştur.

12. Genişletmeler ve Gözlemsel Sınamalar

Friedmann denklemleri arka plan denklemleridir. Ampirik güçleri, çok sayıda bağımsız gözlemin aynı genişleme geçmişinin farklı integrallerini veya türevlerini ölçmesinden gelir. Tip Ia süpernovaları göreceli ışınım uzaklıklarını ölçer ve özellikle yakın dönem ivmelenmeye duyarlıdır. Baryon akustik salınımları, standart cetvel olarak ses ufkunu kullanarak $D_M(z)$ ve $H(z)$

kombinasyonlarını ölçer. Kozmik kronometreler (127) aracılığıyla $H(z)$ 'yi daha doğrudan ölçmeyi amaçlar. Kozmik mikrodalga arka plan akustik tepe noktalarının açısal ölçeğini sabitler ve fiziksel madde ile baryon yoğunluklarını sıkı biçimde sınırlar [13, 16].

Yararlı bir CMB uzaklık niceliği açısal akustik ölçeklerdir:

$$\ell_A = \pi \frac{D_M(z_*)}{r_s(z_*)}, \quad (181)$$

burada z_* foton ayrışmasının kırmızıya kayması ve r_s eşhareketli ses ufkudur. Ses ufkı

$$r_s(z_*) = \int_{z_*}^{\infty} \frac{c_s(z)}{H(z)} dz, \quad (182)$$

ile verilir; foton-baryon ses hızı ise

$$c_s(z) = \frac{c}{\sqrt{3[1 + R_b(z)]}}, \quad (183)$$

ve

$$R_b(z) = \frac{3\rho_b}{4\rho_\gamma}. \quad (184)$$

şeklinde. Ayrıntılı rekombinasyon fiziği bu makalenin kapsamı dışında olsa da, bu denklemler erken-Evren fiziği ile geç-zaman geometrisinin CMB parametre çıkarımında neden bağlantılı olduğunu gösterir.

Basit bir genişletme, Λ yerine sabit $w \neq -1$ olan bir karanlık-enerji bileşeni koyar. Madde ve sabit- w karanlık enerji içeren düz bir evrende,

$$E^2(z) = \Omega_{m0}(1+z)^3 + (1 - \Omega_{m0})(1+z)^{3(1+w)}. \quad (185)$$

İvmelenme koşulu

$$q(z) = \frac{1}{2}\Omega_m(z) + \frac{1+3w}{2}\Omega_{de}(z) < 0. \quad (186)$$

haline gelir. $w < -1/3$ ise karanlık enerji ivmelenmeyi sürebilir; $w = -1$ ise (186) Λ CDM ifadesine indirgenir.

Eğrilik bir başka önemli genellemedir. $\Omega_k \propto a^{-2}/H^2$ olduğundan, etkin bir akışkan gibi davranır ve

$$w_k = -\frac{1}{3}, \quad (187)$$

değerine sahiptir; ancak maddesel değil geometriktir. Eğrilik, ivme denklemi (58) içinde doğrudan görünmez; bunun yerine (137) aracılığıyla uzaklık ile kırmızıya kayma arasındaki ilişkiyi değiştirir. Bu nedenle geometrik yoklamalar Ω_k sınırlandırması için özellikle önemlidir.

Daha köklü genişletmeler kütleçekimin kendisini değiştirir. Homojen düzeyde bu tür kuramların çoğu

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3}(\rho + \rho_{\text{eff}}) - \frac{kc^2}{a^2}, \quad (188)$$

biçiminde düşündürücü şekilde yazılabilir; burada ρ_{eff} yeni kütleçekimsel serbestlik derecelerini veya Einstein-Hilbert eylemine düzeltmeleri temsil eder. Bununla birlikte, arka plan genişlemesini eşleştirmek yeterli değildir: yaşayabilir bir kuram aynı zamanda yapı büyümesini, kütleçekimsel mercekleşmeyi ve kütleçekimin yerel testlerini de yeniden üretmelidir [8, 9].

13. Tartışma

Türetim, Friedmann denklemlerinin genel görelilik ve kozmolojik ilkenin ötesinde ek varsayımlar olmadığını gösterir. FLRW metriği belirtildiğinde, homojenlik ve izotropi Einstein'ın on alan denklemini iki bağımsız skaler denkleme indirger. Birinci Friedmann denklemi, anlık genişleme hızını yoğunluk ve eğrilikle ilişkilendiren bir kısıt denklemidir. İkincisi ise ivme için dinamik bir denklemdir ve basıncın kütleçektiğini açıkça gösterir.

Kuruluşun altında birkaç varsayım yatar. Birincisi, Evren tam olarak homojen ve izotropik kabul edilir. Gerçek yapı oluşumu FLRW arka planı etrafında pertürbasyonlar gerektirir; yoğunluk karşıtlıkları kütleçekimsel olarak büyür ve sonunda doğrusal olmayan hale gelir. Bununla birlikte arka plan çözümü uzaklık-kırmızıya kayma bağıntıları, kozmik yaşlar ve ortalama genişleme geçmişi için doğru sıfıncı-mertebe betimleme olarak kalır. İkincisi, madde bileşenleri mükemmel akışkanlar olarak modellenir. Bu, soğuk karanlık madde, küçük ölçekler üzerinden ortalaması alınmış baryonlar, rekombinasyon öncesi ve sonrası fotonlar ve kozmolojik sabit için mükemmel bir yaklaşımdır. Skaler alanlar veya kusurlu akışkanlar gibi daha karmaşık kaynaklar, $p = w\rho c^2$ yerine uygun gerilme-enerji tensörü konularak dâhil edilebilir.

İvme denkleminin gözlemsel önemi abartılamaz. Evren yalnızca madde ve negatif olmayan basınçlı ışınım içerseydi, $\rho + 3p/c^2 > 0$ olurdu ve (58) yavaşlamayı ima ederdi. Riess ve ark. [14] ile Perlmutter ve ark. [15] tarafından elde edilen süpernova sonuçları, uzak Tip Ia süpernovalarının yavaşlayan madde-baskın bir evrende beklenenden daha sönük olduğunu göstermiştir; bu da daha büyük ışınım uzaklıklarını ve dolayısıyla ivmelenen genişlemeyi ima eder. En minimal yorumda bu ivmelenme, $w = -1$ olan tekdüze vakum enerjisine eşdeğer Λ tarafından neden olunur.

Planck 2018 kozmik mikrodalga arka plan analizi, $H_0 = 67.4 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$ ve $\Omega_m = 0.315$ dâhil olmak üzere altı-parametrelili düz Λ CDM modelindeki parametrelerin hassas bir erken-Evren belirlemesini verir [16]. Ancak yerel uzaklık merdiveni ölçümleri, kalibrasyon ve örnek seçimine bağlı olarak $73 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$ civarında daha yüksek bir değeri tercih eder. Hubble gerilimi olarak bilinen bu uyuşmazlık, çağdaş kozmolojinin merkezi açık sorunlarından biridir. Tanınmamış sistematikleri yansıtabilir veya erken karanlık enerji, ek görelili türler, değiştirilmiş rekombinasyon ya da daha egzotik kütleçekim fiziği gibi minimal Λ CDM ötesi fiziğe işaret edebilir. Günümüzde önerilen hiçbir genişletme evrensel kabul görmüş değildir.

Kozmolojik sabitin kendisi derin bir kuramsal sorun doğurur. Kuantum alan kuramı, vakum dalgalanmalarının gerilme-enerji tensörüne katkı yapması gerektiğini öne sürer; ancak vakum yoğunluğuna ilişkin saf tahminler gözlenen değeri muazzam çarpanlarla aşar. Tersine, gözlenen yoğunluk (157), madde ve vakum farklı ölçeklenmelerine rağmen bugün madde yoğunluğuyla aynı mertebededir. Bu "tesadüf problemi" dinamik

karanlık-enerji modellerini motive eder; ancak mevcut gözlemler $w = -1$ ile tutarlı kalmaktadır.

Son olarak, eğrilik artık güçlü biçimde sınırlandırılmıştır. (89) toplam kuralında Ω_k gözlemsel olarak sıfıra yakındır. Uzaysal düzlük aynı zamanda enflasyonel kozmolojinin de başlıca öngörüsüdür; enflasyon erken Evren'deki ivmelenen genişleme ile $|\Omega_k|$ değerini sıfıra doğru iter. Dolayısıyla geç-zamanlı ivmelenme ve erken-zamanlı enflasyon matematiksel olarak ilişkili olgulardır: her ikisi de yeterince negatif etkin basınca sahip bir bileşenden doğar.

14. Sonuç

Kozmolojik ilkedden başlayıldığında, FLRW metriği tam olarak homojen ve izotropik bir evren için tekil uzayzaman geometrisidir. Christoffel sembollerinin, Ricci tensörünün, Ricci skalerinin ve Einstein tensörünün doğrudan hesabı, kaynak eşhareketli mükemmel akışkan olduğunda Friedmann denklemlerine götürür. Birinci Friedmann denklemi,

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{kc^2}{a^2} + \frac{\Lambda c^2}{3}, \quad (189)$$

genişleme-hızı kısıtıdır. İkincisi,

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}\left(\rho + \frac{3p}{c^2}\right) + \frac{\Lambda c^2}{3}, \quad (190)$$

ivme yasasıdır. Kovaryant korunum

$$\dot{\rho} + 3H\left(\rho + \frac{p}{c^2}\right) = 0, \quad (191)$$

verir; buradan sabit durum-denklemleri parametresi w için $\rho \propto a^{-3(1+w)}$ sonucu çıkar.

Madde, ışıınım ve vakum enerjisi bu nedenle ayrı genişleme geçmişlerine sahiptir: sırasıyla $a \propto t^{2/3}$, $a \propto t^{1/2}$ ve $a \propto e^{Ht}$. Gözlenen geç Evren'de düz madde-artı- Λ modeli analitik çözüme sahiptir:

$$a(t) = \left(\frac{\Omega_m}{\Omega_\Lambda}\right)^{1/3} \sinh^{2/3}\left[\frac{3}{2}H_0\sqrt{\Omega_\Lambda}t\right], \quad (192)$$

bu çözüm yavaşlayan madde baskınlığından ivmelenen vakum baskınlığına geçişi doğru biçimde betimler. Aynı çerçeve Tip Ia süpernova Hubble diyagramını, Evren'in yaşını ve $z \simeq 0.6-0.7$ yakınındaki gözlenen geçiş kırmızıya kaymasını açıklar. Friedmann denklemleri bu nedenle hem genel göreliliğin kompakt bir matematiksel sonucu hem de modern kozmolojinin vazgeçilmez nicel dilidir.

A. Ricci Tensörü İçin Ek Cebir

Bu ekte, kompakt türetimlerde çoğu zaman atlanan adımlar kaydedilmektedir. Karışık bağlantının izi

$$\Gamma_{0\alpha}^\alpha = \Gamma_{0i}^i = 3H. \quad (193)$$

şeklinde. $\Gamma_{00}^\alpha = 0$ olduğundan, 00 Ricci bileşeni

$$R_{00} = -\partial_0\Gamma_{0\alpha}^\alpha - \Gamma_{0\beta}^\alpha\Gamma_{0\alpha}^\beta. \quad (194)$$

biçimine indirgenir. $\Gamma_{0j}^i = H\delta_j^i$ kullanılırsa

$$\Gamma_{0\beta}^\alpha\Gamma_{0\alpha}^\beta = H^2\delta_j^i\delta_i^j = 3H^2, \quad (195)$$

ve dolayısıyla

$$R_{00} = -3\dot{H} - 3H^2 = -3\frac{\ddot{a}}{a}. \quad (196)$$

elde edilir.

Uzaysal bileşenler için dört-boyutlu sonucu içsel üç-eğrilik kısmına ve a 'nın zaman türevlerini içeren terimlere ayırılım. İçsel katkı

$${}^{(3)}R_{ij} = 2k\gamma_{ij}. \quad (197)$$

şeklinde. Γ_{ij}^0 ve Γ_{0j}^i içeren terimler

$$\partial_0\Gamma_{ij}^0 = \frac{a\ddot{a} + \dot{a}^2}{c^2}\gamma_{ij}, \quad (198)$$

$$\Gamma_{ij}^0\Gamma_{0\beta}^\beta = \frac{3a\dot{a}H}{c^2}\gamma_{ij}, \quad (199)$$

$$-2\Gamma_{it}^0\Gamma_{0j}^t = -\frac{2a\dot{a}H}{c^2}\gamma_{ij}. \quad (200)$$

şeklinde birleşir. Bu zaman-bağımlı parçaların toplamı

$$\frac{a\ddot{a} + 2\dot{a}^2}{c^2}\gamma_{ij}. \quad (201)$$

verir. (197) ile birleştirildiğinde

$$R_{ij} = \left(\frac{a\ddot{a}}{c^2} + \frac{2\dot{a}^2}{c^2} + 2k\right)\gamma_{ij}, \quad (202)$$

elde edilir; bu da (32) denkleminde verilen sonuçtur.

B. Bileşenler Cinsinden Kovaryant Korunum

Eşhareketli mükemmel akışkan için karışık tensör bileşenleri

$$T_\nu^\mu = \text{diag}(\rho c^2, -p, -p, -p). \quad (203)$$

şeklinde. $\nu = 0$ korunum yasası

$$\nabla_\mu T_0^\mu = \partial_\mu T_0^\mu + \Gamma_{\mu\lambda}^\mu T_0^\lambda - \Gamma_{\mu 0}^\lambda T_\lambda^\mu. \quad (204)$$

biçiminde yazılabilir. Yalnızca köşegen bileşenler katkı verir. Birinci terim

$$\partial_\mu T_0^\mu = \frac{d}{dt}(\rho c^2). \quad (205)$$

şeklinde. İkinci terim

$$\Gamma_{\mu\lambda}^\mu T_0^\lambda = \Gamma_{\mu 0}^\mu \rho c^2 = 3H\rho c^2. \quad (206)$$

olur. Üçüncü terim

$$-\Gamma_{\mu 0}^\lambda T_\lambda^\mu = -\Gamma_{i 0}^i T_i^i = 3Hp. \quad (207)$$

şeklinde. Böylece

$$\nabla_\mu T^\mu_0 = c^2 \dot{\rho} + 3H\rho c^2 + 3Hp. \quad (208)$$

elde edilir. (208) sıfıra eşitlenip c^2 'ye bölüldüğünde

$$\dot{\rho} + 3H\left(\rho + \frac{p}{c^2}\right) = 0, \quad (209)$$

yani akışkan denklemi (61) elde edilir.

Kaynaklar

- [1] B. W. Carroll and D. A. Ostlie, *An Introduction to Modern Astrophysics*, 2. baskı, Addison-Wesley, San Francisco (2007).
- [2] A. Friedmann, Über die Krümmung des Raumes, *Zeitschrift für Physik* **10**, 377–386 (1922).
- [3] G. Lemaître, Un univers homogène de masse constante et de rayon croissant, *Annales de la Société Scientifique de Bruxelles* **47**, 49–59 (1927).
- [4] H. P. Robertson, Kinematics and world-structure, *Astrophysical Journal* **82**, 284–301 (1935).
- [5] A. G. Walker, On Milne's theory of world-structure, *Proceedings of the London Mathematical Society* **42**, 90–127 (1937).
- [6] E. Hubble, A relation between distance and radial velocity among extra-galactic nebulae, *Proceedings of the National Academy of Sciences* **15**, 168–173 (1929).
- [7] A. Einstein, Kosmologische Betrachtungen zur allgemeinen Relativitätstheorie, *Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften* (1917), 142–152.
- [8] S. Weinberg, *Gravitation and Cosmology*, Wiley, New York (1972).
- [9] C. W. Misner, K. S. Thorne, and J. A. Wheeler, *Gravitation*, W. H. Freeman, San Francisco (1973).
- [10] P. J. E. Peebles, *Principles of Physical Cosmology*, Princeton University Press, Princeton (1993).
- [11] S. Dodelson, *Modern Cosmology*, Academic Press, San Diego (2003).
- [12] B. Ryden, *Introduction to Cosmology*, 2. baskı, Cambridge University Press, Cambridge (2017).
- [13] W. Hu and N. Sugiyama, Small-scale cosmological perturbations: an analytic approach, *Astrophysical Journal* **471**, 542–570 (1996).
- [14] A. G. Riess et al., Observational evidence from supernovae for an accelerating universe and a cosmological constant, *Astronomical Journal* **116**, 1009–1038 (1998).
- [15] S. Perlmutter et al., Measurements of Ω and Λ from 42 high-redshift supernovae, *Astrophysical Journal* **517**, 565–586 (1999).
- [16] Planck Collaboration, N. Aghanim et al., Planck 2018 results. VI. Cosmological parameters, *Astronomy & Astrophysics* **641**, A6 (2020).